

Vigas Hiperestáticas

A.J.M.Checa <ajmoreno@ull.es>

November 11, 2007

En el tipo de vigas que vamos a analizar en esta sección, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Por tanto, hemos de buscar algún método que nos permita establecer tantas relaciones independientes, como ecuaciones necesitemos para calcular las reacciones. Las relaciones geométricas con el momento flector¹, o los Teoremas de Castigliano que explicaremos a continuación, son los métodos que utilizaremos para encontrar las ecuaciones necesarias para resolver las vigas hiperestáticas.

I Teoremas de Castigliano

Sea un cuerpo elástico en R^3 sobre el que actúan un conjunto de fuerzas generalizadas² $X_1, \dots, X_n$ aplicadas sobre los puntos del sólido $A_1, \dots, A_n$ y llamamos $U_T(X_1, \dots, X_n)$ a la energía potencial elástica o potencial interno. Entonces la relación entre la deformación δ_i del punto A_i y X_i viene dada por :

• I

$$\delta_i = \frac{\partial U_T}{\partial X_i} \quad (1)$$

• II

$$X_i = \frac{\partial U_T}{\partial \delta_i} \quad (2)$$

¹ecuación

²Las fuerzas generalizadas se refieren tanto a las fuerzas como a los momentos de las fuerzas. En el caso de las primeras, $X_i = F_i$, la deformación $\delta_i = y_i$ es la distancia entre dos puntos, antes y después de la deformación, como se muestra en la figura I. Si $X_i = M_i$ es un momento aplicado en i , entonces $\delta_i = \frac{dy_i}{dx}$, es decir la tangente de la deformación en el punto de aplicación del momento.

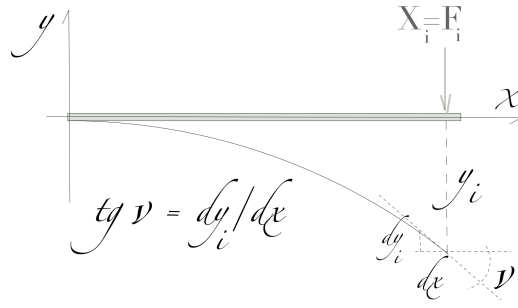


Figure 1: deformación

1.1 Ejemplo 1: Sistema isoestático

En la figura 1 se muestra una viga de longitud L empotrada en su parte izquierda, y sometida a una carga F en su extremo. Vamos a calcular la deformación inducida utilizando el primer teorema de Castigliano.

- La energía potencial elástica almacenada en la viga puede calcularse mediante la expresión:

$$U_T = \int_{x=0}^L \frac{M(x)^2 dx}{2EI} \quad (3)$$

- En este caso el momento flector es $M(x) = F(x - L)$
- Según el primer teorema de Castigliano,

$$\delta_i = \frac{\partial U_T}{\partial F} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx,$$

por lo que:

$$\delta_i = \frac{F}{EI} \int_0^L (x - L)^2 dx$$

y por tanto la deformación $\delta_i = y_i$ es,

$$y_i = -\frac{FL^3}{3EI}$$

2 Sistemas hiperestáticos

Se dice que un sistema tiene grado de hiperestaticidad G , cuando son necesarias G ecuaciones extras, además de las correspondientes a las condiciones de equilibrio³.

2.1 Sistemas de primer orden

2.1.1 Ejemplo 1

En la viga de la figura 2, el vínculo B introduce una nueva incógnita en el sistema de ecuaciones estáticas:

$$\sum F = 0 \Rightarrow R_a + R_b = \rho_o L, \quad (4)$$

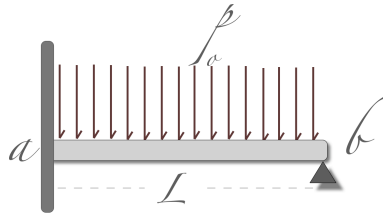


Figure 2: ejemplo 2

$$\sum_{x=\frac{L}{2}} M = 0 \Rightarrow \frac{L}{2}(R_b - R_a) - M_a = 0, \quad (5)$$

como se deduce del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.

Para calcular las reacciones en los vínculos, podemos volver a utilizar el primer teorema de Castigliano. En este caso podemos utilizar el desplazamiento o su derivada⁴.

- Primer método; La deformación δ_i en A es igual a cero,

$$\delta_i = \frac{\partial U_T}{\partial R_a} = 0 \Rightarrow \int_{x=0}^L M \frac{\partial M}{\partial R_a} dx = 0, \quad (6)$$

³En equilibrio estático:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0, \quad \sum_{j=1}^M M_j = 0,$$

Si $N + M$ es el número de ecuaciones independientes y V es el número de incógnitas (en nuestro caso, reacciones en vínculos), $G = V - N - M$.

⁴En los empotramientos $\delta_e = 0$ y $\partial \delta_e / \partial x = 0$

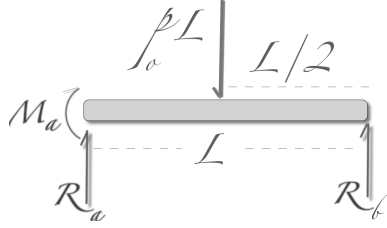


Figure 3: DCL

Esta última expresión nos permite conocer una nueva relación entre las incógnitas (R_a , R_b , M_a). Pero antes tenemos que calcular el momento flector y su deriva respecto a R_a en el único tramo de la viga.

$$M(x) = M_a + R_a x - \frac{\rho_o x^2}{2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial R_a} = \frac{\partial M_a}{\partial R_a} + x, \quad (8)$$

La expresión 8, utilizando la relación 5 para conocer la derivada parcial de M_a respecto a R_a , queda como:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial R_a} = x + \frac{L}{2} \left(\frac{\partial R_b}{\partial R_a} - 1 \right),$$

y de 4, obtenemos:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial R_a} = x - L,$$

Por tanto, ya podemos integrar la expresión 6:

$$\int_{x=0}^L \left(M_a + R_a \cdot x - \frac{\rho_o x^2}{2} \right) (x - L) dx = 0,$$

de donde obtenemos:

$$M_a + \frac{R_a L}{3} = -\frac{\rho_o L^2}{12}, \quad (9)$$

Las relaciones 4, 5 y 9 permiten conocer las reacciones en los vínculos.

Solicitud⁵

- Segundo método; La derivada de la deformación también se anula en el empotramiento,

$$\frac{d\delta_a}{dx} = \frac{\partial U_T}{\partial M_a} = 0 \Rightarrow \int_{x=0}^L M \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = 0, \quad (10)$$

⁵solicitar: (Del lat. sollicitāre). Real Academia Española [RAE](#)

En este caso particular es fácil demostrar que $\partial M(x)/\partial M_a = cte \cdot \partial M(x)/\partial R_a$, y por tanto:

$$cte \cdot \int_{x=0}^L \left(M_a + R_a \cdot x - \frac{\rho_o x^2}{2} \right) (x - L) dx = 0,$$

igual que antes.

2.1.2 Ejemplo 2

Igual que en el caso anterior, la viga de la figura 4 tiene grado de hiperestaticidad uno. Las

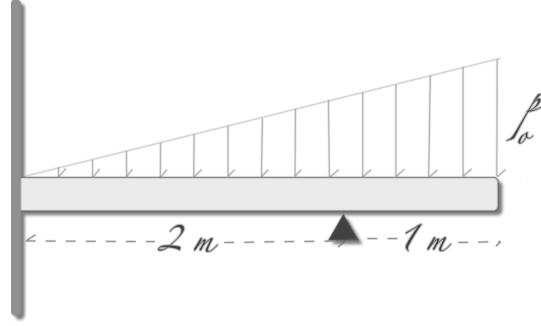


Figure 4: Ejemplo 2

ecuaciones de equilibrio establecen las relaciones entre los vínculos:

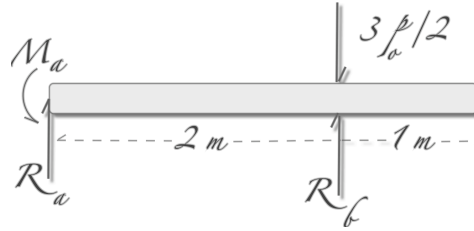


Figure 5: DCL

$$\begin{aligned} \sum F &= R_a + R_b + \frac{3\rho_o}{2} = 0, \\ \sum_{x=2} M &= M_a - 2R_a = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

En el primer tramo:

$$M(x) = -M_a + R_a x - \frac{\rho_o x^3}{18}, \quad (12)$$

como se deduce de la figura 6, Para calcular $\partial M(x)/\partial M_a$ tendremos en cuenta que:

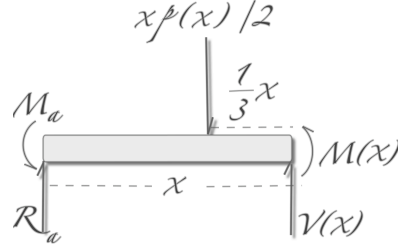


Figure 6: Primer Tramo

$$\frac{\partial R_a}{\partial M_a} = \frac{1}{2},$$

como podemos deducir de la ecuación II.

Una vez que hemos calculado el momento, utilizamos $d\delta_a/dx = 0$ en el empotramiento,

$$\int_0^3 M(x) \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \int_0^2 M(x) \frac{\partial M}{\partial M_a} dx$$

Esto es así porque $\frac{\partial M}{\partial M_a} = 0$ en el segundo tramo. La integral da como resultado,

$$2(M_a - R_a) + \frac{2\rho_o}{9} - M_a + \frac{4R_a}{3} - \frac{16\rho_o}{90} = 0,$$

$$-\frac{2R_a}{3} + M_a = -\frac{4\rho_o}{90},$$

y el sistema de ecuaciones resuelto:

$$R_a = -\frac{\rho_o}{30}(N)$$

$$M_a = -\frac{\rho_o}{15}(Nm)$$

$$R_b = \frac{22\rho_o}{15}(N)$$

Es importante saber interpretar los signos negativos de estas expresiones. El resultado es correcto, pues al ser negativos R_a y M_a actúan en sentido contrario al supuesto en la figura 5.

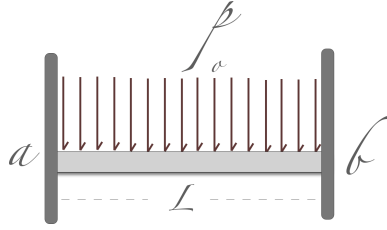


Figure 7: Doble empotramiento

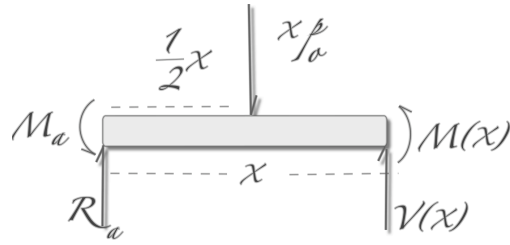


Figure 8: Primer tramo

2.2 Sistemas de orden 2

En el primer tramo:

$$M(x) = R_a x - M_a - \frac{\rho_o x^2}{2}, \quad (13)$$

si además si suponemos que $R_a = R_b$, entonces $R_a = \rho_o L/2$,

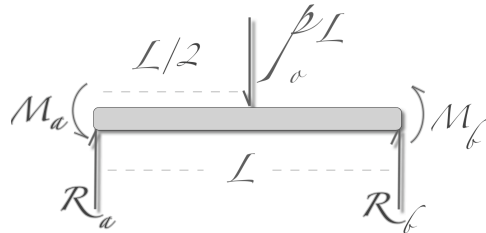


Figure 9: DCL

$$M(x) = -M_a + \frac{\rho_o x}{2}(L - x),$$

Nos basta con una ecuación para relacionar M_a y ρ_o ;

$$\frac{\partial U_T}{\partial M_a} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial M_a} dx, \Rightarrow \int_0^L M(x) dx = 0,$$

$$M_a = \frac{\rho_o L^4}{12}, \quad (14)$$

También podríamos comprobar que mediante la condición de desplazamiento nulo en a ,

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial R_a} dx, \Rightarrow \int_0^L x M(x) dx = 0, \quad (15)$$

llegamos al mismo resultado⁶.

2.2.1 Reducción de un sistema de quinto orden

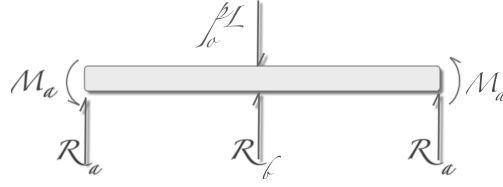


Figure 10: DCL

Si en la viga 7 introducimos un vínculo a $L/2$ de uno de los empotramientos, tendremos tres incógnitas y solo una ecuación. Sólo R_a y R_b están relacionadas. Por tanto, podemos utilizar dos de las siguientes relaciones:

$$\delta_a = \delta_b = 0,$$

$$\frac{d\delta_a}{dx} = \frac{d\delta_b}{dx} = 0,$$

La expresión para el momento en primer tramo es la misma que en la ecuación 13 además solo hemos de integrar de 0 a $L/2$ ⁷;

$$\frac{\partial U_T}{\partial M_a} = 0 \Rightarrow \int_0^{L/2} \left(R_a x - M_a - \frac{\rho_o x^2}{2} \right) dx = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial R_b} = 0 \Rightarrow \int_0^{L/2} \left(R_a x^2 - M_a x - \frac{\rho_o x^3}{2} \right) dx = 0, \quad (17)$$

⁶En este caso, además de considerar R_a y M_a como variables independientes, R_a tiene que aparecer explícitamente en el integrando de la ecuación 15, como se aclara en el siguiente ejemplo

⁷Demuéstrelo

Este mismo razonamiento nos hubiera llevado a la misma solución que en el apartado anterior.
Ejercicio propuesto:

- Demuestre como llegar a la ecuación **17**
- Utilice las ecuaciones **16** y **17** para encontrar la solución **14** del ejercicio anterior.