

energía total U almacenada en la barra durante la deformación. Por consiguiente,

$$U = \frac{P\delta}{2} \tag{167}$$

Utilizando la ecuación (1), se obtienen las dos expresiones siguientes para la energía de deformación de una barra prismática:

$$U = \frac{P^2 l}{2 AE} \tag{168}$$

$$U = \frac{AE\delta^2}{2l} \tag{169}$$

En la primera de ellas, la energía de deformación viene en función de las características geométricas y elásticas de la barra y de la carga P y en la segunda se expresa como una función de las mismas características y del alargamiento δ .

En las aplicaciones prácticas, la energía de deformación por unidad de volumen tiene gran importancia, y su valor, deducido de las ecuaciones (168) y (169), será

$$w = \frac{U}{Al} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{170}$$

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{171}$$

donde $\sigma = \frac{P}{A}$ es la fatiga de extensión y $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$ es el alargamiento unitario.

La cantidad de energía de deformación que por unidad de volumen puede almacenar una barra sin deformación permanente¹ se halla sustituyendo el límite de elasticidad del material en lugar de σ , en la ecuación (170). Un acero con un límite de elasticidad de 2.000 kg./cm.² y $E = 2 \times 10^6$ kg./cm.² da $w = 1$ kgcm./cm.³, una goma con un módulo de elasticidad $E = 10$ kg./cm.² y un límite de elasticidad de 20 kg./cm.² da

$$w = \frac{20^2}{2 \times 10} = 20 \text{ kgcm./cm.}^3.$$

¹ Esta cantidad se denomina por algunos autores «módulo de resiliencia».

CAPÍTULO X

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

63. Energía elástica de deformación en la tracción.—Al analizar la extensión simple de una barra (véase fig. 1), se vió que durante el alargamiento bajo la acción de una carga creciente se gastaba trabajo y que este trabajo se transformaba

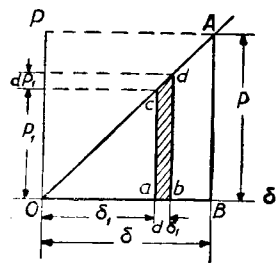


FIG. 241

parcial o totalmente en energía potencial de deformación. Si la deformación no alcanza el límite elástico, el trabajo realizado por la fuerza exterior se transforma por completo en energía potencial y puede recobrase realizando una descarga gradual de la barra deformada.

Si el valor final de la carga es P y el alargamiento correspondiente δ , el diagrama de ensayo a la extensión tendrá la

forma indicada en la figura 241, en la que las abscisas son los alargamientos y las ordenadas las cargas correspondientes. P_1 representa un valor intermedio de la carga; δ_1 , el alargamiento debido a él. Un aumento dP_1 de la carga origina un incremento $d\delta_1$ en el alargamiento. El trabajo realizado por P_1 durante este alargamiento es $P_1 d\delta_1$, representado en la figura por el área rayada. Si se tiene en cuenta el aumento de P_1 durante el alargamiento, el trabajo realizado estará representado por el área del trapecio $abcd$. El trabajo total realizado al aumentar la carga desde O a P es la suma de áreas elementales análogas y vendrá dado por el área del triángulo OAB . Dicha área representa la

Tiene, a veces, gran interés conocer el máximo de la energía de deformación por unidad de peso w_1 que un material puede almacenar sin que se produzca deformación permanente. Esta cantidad se calcula por la ecuación (170), poniendo, en vez de σ , el límite de elasticidad y dividiendo w por el peso de un cm.^3 del material. En la tabla que sigue se exponen algunos datos de esta naturaleza:

Material	Densidad	E kg./cm. ²	Límite de elasticidad en kg./cm. ²	w por cm. ³	w_1 por kg.
Acero corriente ...	7,8	2×10^6	2.000	1 kg./cm. ³	128 kg./cm.
Acero duro..	7,8	2×10^6	8.000	16 » »	2051 » »
Cobre.....	8,5	1×10^6	300	0,045 » »	5,3 » »
Roble.....	1,0	10^5	300	0,45 » »	450 » »
Goma	0,93	10	20	20 » »	21505 » »

Se observará que la cantidad de energía que puede almacenar un determinado peso de goma es unas diez veces mayor que la que puede almacenar el mismo peso de acero para resortes y unas 200 veces mayor que la que es capaz de almacenar el mismo peso de un acero corriente.

Problemas

1. Una barra prismática de acero de 28 cm. de largo y 25 cm.² de sección recta se comprime con una fuerza $R = 2.000$ kg. Determinar la energía de deformación.

Respuesta:

$$U = 1 \text{ kg. cm.}$$

2. Determinar la energía de deformación en el problema anterior si el área de la sección recta de la barra es 12,5 cm.², en lugar de 25 cm.².

Respuesta:

$$U = 2 \text{ kg. cm.}$$

3. Determinar la energía de deformación en una barra vertical de acero y sección uniforme deformada por su propio peso si la longitud de la barra es 30 m., el área de su sección recta es 6,25 cm.² y el peso del acero por m.³, 7.800 kg.

Respuesta:

$$U = 1,158 \text{ kg. cm.}$$

4. Determinar la energía de deformación en el problema anterior si además del peso propio tiene la barra una carga axial $P = 500$ kg. aplicada en su extremo.

Respuesta:

$$U = 41,37 \text{ kg. cm.}$$

5. Encontrar la solución del problema representado en la figura 15 para el caso en que todas las barras tengan la misma sección y el mismo módulo, igualando la energía de deformación del sistema al trabajo suministrado por la carga P .

Solución: Siendo X la fuerza en la barra vertical, su alargamiento será $\frac{Xl}{AE}$ y el trabajo suministrado por P es $\frac{1}{2} P \times \frac{Xl}{AE}$. Igualando esta expresión a la energía de deformación, se obtiene

$$\frac{1}{2} P \frac{Xl}{AE} = \frac{X^2 l}{2AE} + 2 \frac{(X \cos^2 \alpha)^2 l}{2AE \cos^2 \alpha}$$

de donde

$$X = \frac{P}{1 + 2\cos^3 \alpha}$$

lo que reproduce la solución ya encontrada.

6. Comprobar el problema 2, página 9, mostrando que el trabajo suministrado por la carga es igual a la energía de deformación de las dos barras.

7. Una barra de acero de 75 cm. de longitud y 6,25 cm.² de sección recta se deforma 0,05 cm.

Hallar el valor de la energía de deformación.

Respuesta: Por la ecuación (169),

$$U = \frac{(0,05)^2 \times 2 \times 10^6 \times 6,25}{2 \times 75} = 208,3 \text{ kg./cm.}$$

8. Comparar los valores de la energía de deformación en las dos barras circulares de la figura 242 (a) y (b), suponiendo una distribución uniforme de fatigas en las secciones rectas de las barras.

Solución: La energía de deformación de la barra prismática es

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}$$

La energía de deformación de la otra barra es

$$U_1 = \frac{P^2 \frac{1}{4} l}{2AE} + \frac{P^2 \frac{3}{4} l}{8AE} = \frac{7}{16} \frac{P^2 l}{2AE}$$

Por consiguiente,

$$U_1 : U = \frac{7}{16}$$

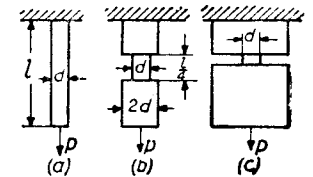


FIG. 242

Para una fatiga máxima, dada la cantidad de energía almacenada en una barra con garganta, es menor que la que almacena una barra de sección uniforme. Es necesaria una cantidad muy pequeña de trabajo para que la fatiga alcance un límite peligroso en una barra que tenga una garganta muy estrecha y un gran diámetro exterior, tal como la representada en la figura 242 (c).

64. **Fatigas producidas por choque.**—Un modo sencillo de producir tracción por choque es el representado en la figura 243. Un peso W cae desde una altura h sobre el tetón mn y por choque produce extensión en la barra AB . Si las masas de la barra y el tetón son pequeños comparados con la masa que produce el choque, se puede obtener una solución del problema bastante aproximada, despreciando la masa de la barra y suponiendo que el peso de dicha barra no realiza trabajo durante el choque. Después del choque, el conjunto tetón y cuerpo W se desplaza hacia abajo, ocasionando la extensión de la barra. Debido a la resistencia de la barra, la velocidad de movimiento del cuerpo disminuye hasta anularse. En este momento, el alargamiento de la barra y las fatigas de extensión correspondientes alcanzan un valor máximo, y estos valores máximos pueden calcularse con facilidad en la hipótesis de que el trabajo total suministrado por el peso se transforma en energía de deformación de la barra ¹. Si δ representa el alargamiento máximo, el trabajo suministrado por W será $W(h + \delta)$. La energía de deformación de la barra viene dada por la ecuación (169). Por consiguiente, la ecuación para el cálculo de δ será

$$W(h + \delta) = \frac{AE}{2l} \delta^2, \quad (a)$$

de donde

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2}, \quad (172)$$

siendo

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE}$$

¹ En los casos prácticos parte de la energía se pierde y el alargamiento real es menor que el calculado con la hipótesis admitida.

la deformación estática de la barra por la acción de la carga W y $v = \sqrt{2gh}$ la velocidad de caída del cuerpo en el momento del choque con el tetón mn . Si la altura h es grande, comparada con δ_{st} , la ecuación (172) puede escribirse de modo aproximado

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2}.$$

La fatiga de extensión correspondiente que se produce en la barra es

$$\sigma = \frac{\delta E}{l} = \frac{E}{l} \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2} = \sqrt{\frac{2E}{Al} \frac{Wv^2}{2g}}. \quad (173)$$

La expresión subradical es directamente proporcional a la energía cinética de caída del cuerpo y al módulo de elasticidad del material de la barra e inversamente proporcional al volumen Al de la barra. Por consiguiente, la fatiga puede disminuirse no sólo aumentando la sección transversal de la pieza, sino también aumentando su longitud o haciéndola de otro material de menor módulo, E . Esto marca una diferencia esencial respecto a la fatiga estática, que, como sabemos, es independiente de la longitud de la barra y del módulo E .

Poniendo, en vez de σ , en la ecuación (173), la σ_t escogida para fatiga de trabajo, la relación que determina las dimensiones de una barra sometida a choque será

$$Al = \frac{2E}{\sigma_t^2} \frac{Wv^2}{2g}, \quad (174)$$

es decir, para un material dado el volumen de la barra debe ser proporcional a la energía cinética de caída del cuerpo si se quiere tener una fatiga máxima constante. Consideremos ahora el caso extremo de anularse h , es decir, el peso W se aplica de modo súbito sobre el tetón mn , sin velocidad inicial. A pesar de no existir en este caso energía cinética al comienzo de la extensión de la barra, el problema es diferente al de una carga estática o gradual de la barra. En el caso de una aplicación estática, se supone que la carga se aplica gradualmente y que, por consiguiente, hay siempre equilibrio entre la carga que actúa y las fuerzas elásticas resistentes de la barra. La cuestión de la energía cinética

no lo es todo, por consiguiente, en el problema que examinamos. En el caso de una aplicación súbita de la carga, el alargamiento de la barra y la fatiga subsiguiente son nulos al principio de la deformación y la carga súbitamente aplicada W empieza a moverse por la acción de su propio peso. Durante este movimiento, las fuerzas resistentes de la barra crecen de un modo gradual, hasta que equilibran a W , cuando el desplazamiento del peso es δ_{st} . Pero en este momento la carga tiene cierta energía cinética adquirida durante el recorrido δ_{st} y, por consiguiente, continúa su movimiento hacia abajo hasta que su velocidad quede

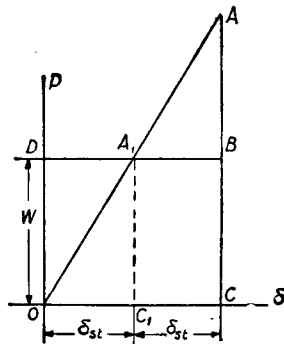


FIG. 244

anulada por la acción de las fuerzas resistentes de la barra. El alargamiento máximo determinado por esta condición se obtiene de la ecuación (172), poniendo en ella $v = 0$. Se tiene

$$\delta = 2\delta_{st}, \quad (175)$$

es decir, una carga súbitamente aplicada; debido a las condiciones dinámicas, produce una deformación doble que la que produciría la misma carga aplicada de modo gradual.

El resultado obtenido puede encontrarse también de modo gráfico (fig. 244). La línea inclinada OA es el diagrama alargamiento-carga para la barra de la figura 243. Por consiguiente, para un alargamiento cualquiera, tal como OC , el área AOC da la energía de deformación correspondiente de la barra. La línea horizontal DB , a la distancia W del eje δ , determina el rectángulo $ODBC$, cuya área representa el trabajo suministrado por la carga W a lo largo del desplazamiento OC . Cuando δ es igual a δ_{st} , el trabajo suministrado será el representado por el área del rectángulo ODA_1C_1 . En el mismo instante, la energía almacenada por la barra viene dada por el área del triángulo OA_1C_1 , que, como se ve, es solamente la mitad del área del rectángulo anterior. La otra mitad del trabajo suministrado la conserva el cuerpo de peso W en forma de energía cinética. Debido a esta velocidad adquirida, el cuerpo continuará su movimiento y no se para hasta una distancia $\delta = 2\delta_{st}$ del punto de partida.

En este momento el trabajo total suministrado por el peso W , representado por el rectángulo $ODBC$, es igual a la energía de deformación almacenada en la barra y representada por el triángulo equivalente OAC .

El estudio anterior del choque se basa en la hipótesis de que las fatigas que acontecen en la barra permanecen siempre por debajo del límite de elasticidad del material. Pasado este límite, el alargamiento de la barra no es proporcional a la fuerza extensora. Suponiendo que el diagrama alargamiento-carga no dependa de la velocidad de la deformación de la barra¹, puede determinarse el alargamiento correspondiente a un caso de choque, aunque dicho alargamiento sobrepase del límite de elasticidad, utilizando el diagrama normal de ensayo a tracción del material (fig. 245). Para un alargamiento máximo dado δ , el área correspondiente $OADF$ representa el trabajo que es necesario suministrar para producir tal alargamiento,

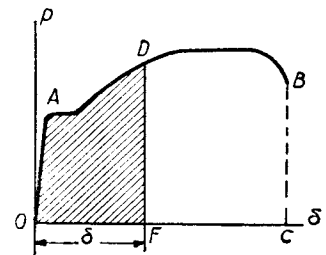


FIG. 245

y este trabajo debe ser igual al trabajo $W(h + \delta)$ producido por el peso W . Cuando $W(h + \delta)$ sea igual o mayor que el área total $OABC$ del diagrama de ensayo, la carga dinámica producirá la rotura de la barra.

De lo expuesto se deduce que cualquier cambio en la forma de la barra que origine una disminución del área total $OABC$ del diagrama disminuye al mismo tiempo la capacidad de resistencia de la barra al choque. En las piezas con garganta de las figuras 242 (b) y (c), por ejemplo, el período plástico del material se concentrará en la garganta y el alargamiento total y el trabajo necesario para producir la rotura será mucho menor que en el caso de la barra cilíndrica de la misma figura.

Las piezas de esta forma son muy poco resistentes al choque, aun cuando el material sea dúctil. Todos los elementos de es-

¹ Los ensayos muestran que con una gran velocidad de deformación el punto de fluencia crece y es necesario mayor cantidad de trabajo para romper la probeta que en una prueba estática. Véase N. N. Davidenkoff, *Bulletin Polyt. Institute*, St. Petersburg, 1913; también Welter, *Ztschr. f. Metallkunde*, 1924.

estructura que tengan agujeros o cualquier variación brusca de sección son de modo análogo débiles al choque¹. En el análisis del problema del choque que acabamos de realizar se ha despreciado la masa de la barra frente a la masa W del cuerpo que producía el choque. Únicamente de este modo puede suponerse que la energía total de caída del cuerpo se transforma en energía de deformación de la barra. El problema es bastante más complicado cuando la barra tiene una masa apreciable que toma parte en los cambios de energía del choque.

Recordemos, primeramente, que cuando una masa $\frac{W}{g}$ se mueve con una velocidad v y choca centralmente con otra masa $\frac{W_1}{g}$ en reposo, y la deformación en el punto de contacto es inelástica, la velocidad v_a de ambas masas después del choque es

$$v_a = \frac{W}{W + W_1} v. \quad (b)$$

En el caso de la barra de la figura 243 las condiciones del problema son más complicadas. Durante el choque, el extremo superior A queda inmóvil, mientras que el extremo inferior B adquiere la misma velocidad que el cuerpo W . Por consiguiente, para el cálculo de la velocidad final v_a por la ecuación (b) deberá utilizarse una «masa reducida», en lugar de la masa total de la barra. Suponiendo que la velocidad de la barra varíe linealmente a lo largo de su longitud, se verá que en este caso la masa reducida debe tomarse igual a un tercio de la masa total de la barra². Para una barra de peso q por unidad de longitud, la ecuación (b) da

$$v_a = \frac{W}{W + \frac{ql}{3}} v.$$

Este valor es la velocidad común que se establece para la carga W y el extremo inferior de la barra en el primer instante

¹ Véase Hackstroh, *Baumaterialienkunde*, pág. 321, 1905, y H. Zimmermann, *Zentralbl. d. Bauverw.*, pág. 265, 1899.

² Esta solución fué obtenida por H. Cox, *Cambridge Phil. Soc Trans.*, pág. 73, 1849. Véase también Todhunter y Pearson, *History*, vol. 1, pág. 895.

del choque. Suponiendo plástica la deformación en la superficie de contacto entre el cuerpo que cae y el apoyo mn (fig. 243), es decir, sin rebote alguno, la energía cinética correspondiente es

$$\frac{v_a^2}{2g} \left(W + \frac{1}{3} ql \right) = \frac{Wv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{ql}{3W}}.$$

Esta cantidad deberá sustituir a

$$\frac{Wv^2}{2g} = Wh$$

en la ecuación (a) para tener en cuenta la pérdida de energía en el primer momento del choque. Por consiguiente, en lugar de la ecuación (172), se obtendrá

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2 \frac{1}{1 + \frac{ql}{3W}}}. \quad (176)$$

El método empleado da resultados tanto más satisfactorios cuanto más pequeña es la masa de la barra comparada con la masa del cuerpo que cae.

En los demás casos es necesario tener en cuenta las vibraciones longitudinales de la barra¹. La deformación local en el punto de contacto durante el choque ha sido estudiada por J. E. Sears² y J. E. P. Wagstaff³.

Problemas

1. Un peso de 5 kg. unido a un hilo de acero de 3 mm. de diámetro (figura 246) cae desde A con la aceleración g . Determinar la fatiga producida en el hilo cuando se detiene bruscamente su extremo superior A . Se despreciará la masa del hilo.

¹ Las vibraciones longitudinales de una barra prismática durante el choque fueron estudiadas por Navier. Una solución más racional es la dada por De Saint Venant (véase su traducción de Clebsch, *Theorie der Elasticitat fester Körper*, nota en el párrafo 61). Véase también I. Bousinesq, *Application des Potentiels*, pág. 508, y C. Ramsauer, *Ann. d. Phys.*, vol. 30, 1909.

² J. E. Sears, *Trans Cambridge Phil. Soc.*, vol. 21, pág. 49, 1908.

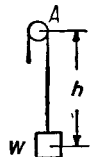
³ J. E. P. Wagstaff, *London Royal Soc. Proc. (Serie A)*, vol. 105, página 544, 1924.

Solución: Si la aceleración del peso W es igual a g , no habrá fatiga alguna en el hilo durante el movimiento. La fatiga después de la detención brusca se hallará por la ecuación (173), en la que se desprecia δ_{st} . Sustituyendo $v^2 = 2gh$ y $l = h$, se obtiene

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EW}{A}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 10^6 \times 5 \times 4}{3,14 \times 3^2}} = 1680 \text{ kg./cm.}^2.$$

Se observará que la fatiga no depende de la altura h de caída, a causa de que la energía cinética del cuerpo aumenta en la misma proporción que el volumen del hilo.

2. Un peso $W = 500$ kg. cae desde una altura $h = 90$ cm. sobre un pilar vertical de madera de 6 m. de largo y 25 cm. de diámetro fijado por su extremo inferior. Determinar la fatiga máxima de compresión en el pilar, suponiendo que para la madera $E = 1,2 \times 10^5$ kg./cm.² y despreciando la masa del pilar y la cantidad δ_{st} .



Respuesta:

$$\sigma = 160 \text{ kg./cm.}^2.$$

Fig. 246 3. Un peso $W = 5.000$ kg. unido al extremo de un hilo de acero (fig. 246) desciende con una velocidad constante $v = 90$ cm./seg. ¿Qué fatiga se producirá en él cuando su extremo superior se detenga bruscamente? La longitud libre del cable en el momento del choque es $l = 18$ m., el área de su sección recta es $A = 15,625$ mm.² y $E = 1,2 \times 10^6$ kg./cm.².

Solución: Despreciando la masa del cable y suponiendo que la energía cinética del cuerpo en movimiento se transforma por completo en energía de deformación del cable, la ecuación que determina el alargamiento máximo del cable es

$$\frac{AE\delta^2}{2l} - \frac{AE\delta_{st}^2}{2l} = \frac{W}{2g} v^2 + W(\delta - \delta_{st}), \quad (d)$$

donde δ_{st} representa el alargamiento estático del cable.

Teniendo en cuenta que $W = \frac{AE\delta_{st}}{l}$ se obtiene mediante la ecuación (d),

$$\frac{AE}{2l} (\delta - \delta_{st})^2 = \frac{Wv^2}{2g},$$

de donde

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\frac{Wv^2 l}{AEg}}$$

Por consiguiente, después de la detención súbita, la fatiga de extensión del cable crece con la relación

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{v}{\delta_{st}} \sqrt{\frac{Wl}{AEg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\delta_{st}}}. \quad (e)$$

Para los datos del problema

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE} = \frac{5.000 \times 1.800}{15,625 \times 1,2 \times 10^6} = 0,48 \text{ cm.}$$

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{90}{\sqrt{981 \times 0,48}} = 5,18.$$

Por consiguiente,

$$\sigma = 5,18 \frac{W}{A} = 1,656 \text{ kg./cm.}^2.$$

4. Resolver el problema anterior si se interpone un resorte que alargue 1 cm. por cada 400 kg. entre el cable y la carga.

Solución:

$$\delta_{st} = 0,48 + \frac{5.000}{400} = 12,98 \text{ cm.}$$

Sustituyendo en la ecuación (e),

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + 0,80 = 1,80; \quad \sigma = 1,8 \frac{W}{A} = 576 \text{ kg./cm.}^2.$$

5. Para el caso de la figura 243, determinar la altura h tal que la fatiga máxima en la barra durante el choque sea 2.400 kg./cm.².

Se supone $W = 12,5$ kg., $l = 1,80$ m., $A = 3,125$ cm.², $E = 2,4 \times 10^6$ kg./cm.². La masa de la barra se desprecia.

Respuesta: $h = 54$ cm.

65. Energía elástica de deformación en los casos de fuerza cortante y torsión.—La energía de deformación almacenada en un elemento sometido a fatiga cortante pura

(figura 247) puede calcularse por el método empleado en el caso de extensión simple. Si se supone fija la cara inferior ad del elemento, solamente deberá considerarse como trabajo suministrado durante la deformación el que realice la fuerza P ligada a la cara superior bc . Suponiendo que el material sigue la

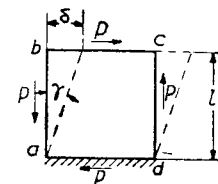


FIG. 247

ley de Hooke, la distorsión es proporcional a la fatiga cortante y el diagrama que representa dicha relación será análogo al de la figura 241. El trabajo dado por la fuerza P y almacenado en forma de energía elástica de deformación, será, por consiguiente (véase ecuación 167),

$$U = \frac{P\delta}{2}. \quad (167')$$

Recordando que

$$\frac{\delta}{l} = \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{P}{AG},$$

se obtienen, deducidas de la ecuación (167'), las dos ecuaciones siguientes:

$$U = \frac{P^2 l}{2AG}, \quad (177) \quad U = \frac{AG\delta^2}{2l}. \quad (178)$$

Las expresiones correspondientes de la energía de deformación por unidad de volumen se obtendrán dividiendo estas ecuaciones por el volumen Al de la pieza

$$w = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (179) \quad w = \frac{\gamma^2 G}{2}, \quad (180)$$

donde $\tau = \frac{P}{A}$ es la fatiga cortante y $\gamma = \frac{\delta}{l}$ es la distorsión unitaria. La cantidad de energía de deformación por cortadura que por unidad de volumen puede almacenar la pieza sin deformación permanente se obtiene sustituyendo en la ecuación (179) τ por el límite de elasticidad.

La energía almacenada por un eje circular sometido a torsión se calcula fácilmente por la ecuación (179). Si $\tau_{\text{máx}}$ es la fatiga cortante en la superficie del eje, la fatiga cortante en un punto situado a la distancia r del eje será: $\tau_{\text{máx}} \frac{2r}{d}$, siendo d el diámetro. La energía por unidad de volumen en este punto, dada por la ecuación (179), será

$$w = \frac{2\tau_{\text{máx}}^2 r^2}{Gd^2}. \quad (a)$$

La energía almacenada por el material comprendido entre dos superficies cilíndricas de radios r y $r + dr$ es

$$\frac{2\tau_{\text{máx}}^2 r^2}{Gd^2} l \times 2\pi r dr,$$

donde l representa la longitud del eje. Por consiguiente, la energía total almacenada en el árbol será

$$U = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2\tau_{\text{máx}}^2 r^2}{Gd^2} l 2\pi r dr = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2 l}{4} \frac{\tau_{\text{máx}}^2}{2G}. \quad (18)$$

Esta expresión indica que la energía total de deformación es solamente la mitad de la que correspondería al caso en que todos los elementos del árbol sufriesen la misma fatiga cortante $\tau_{\text{máx}}$.

La energía de torsión puede calcularse mediante el diagrama de torsión (fig. 248), construido tomando el momento torsor en ordenadas y el ángulo de torsión de abscisas. Por debajo del límite de elasticidad, el ángulo de torsión es proporcional al momento torsor y el diagrama será la recta OA . El área infinitesimal rayada en la figura representa el trabajo suministrado por el momento torsor para un aumento del ángulo de torsión $d\varphi$. El área total $OAB = M_t \frac{\varphi}{2}$, representa la energía total almacenada por el eje durante la torsión. Recordando que $\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}$ se obtiene

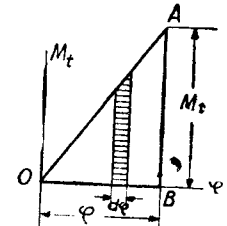


FIG. 248

$$U = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} \quad \text{ó} \quad U = \frac{\varphi^2 GI_p}{2l}. \quad (182)$$

En la primera de las ecuaciones, la energía se expresa en función del momento torsor y en la segunda viene dada como función del ángulo de torsión.

En el caso general de que la sección tenga una forma cualquiera y el momento torsor varíe a lo largo del eje, el ángulo de torsión entre dos secciones adyacentes viene dado por la ecuación (véase pág. 263)

$$\frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{M_t}{C} dx.$$

La energía de deformación de un elemento del árbol será

$$\frac{1}{2} M_t \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{C}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx$$

y la energía total de torsión es

$$U = \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx. \quad (183)$$

Problemas

1. Determinar la relación entre el límite de elasticidad por cortadura y el límite de elasticidad a la tracción si la energía de deformación que por cm.^3 puede almacenar el material sin deformación permanente es la misma en tracción que en cortadura.

Solución: Por las ecuaciones (170) y (179) se tiene

$$\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\tau^2}{2G},$$

de donde

$$\frac{\tau}{\sigma} = \sqrt{\frac{G}{E}}.$$

Para el acero,

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{1}{2,6}} = 0,62 \sigma.$$

2. Determinar la flecha de un resorte helicoidal (fig. 232), empleando el método de la energía de deformación en torsión.

Solución: Sea P la fuerza que actúa en la dirección del eje de la hélice (fig. 232), R el radio de las espiras y n su número. La energía de torsión almacenada por el resorte —ecuación (182)—, será

$$U = \frac{(PR)^2 2\pi Rn}{2GI_p}.$$

Igualando esta expresión al trabajo suministrado $\frac{P\delta}{2}$, se obtiene

$$\delta = \frac{2\pi nPR^3}{GI_p} = \frac{64nPR^3}{Gd^4}.$$

3. El peso de un resorte helicoidal de acero es 5 kg. Determina la cantidad de energía que podrá almacenarse en este resorte sin deformación permanente si el límite de elasticidad por cortadura es:

$$0,62 \times 8.000 = 4.960 \text{ kg./cm.}^2.$$

Solución: La energía por kg. del material será 2.051 kg. cm. Por consiguiente, la energía total de torsión¹ que puede almacenarse en es resorte será:

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 2051 = 5127 \text{ kg. cm.}$$

4. Un eje circular macizo y un tubo delgado del mismo material y peso están sometidos a torsión. ¿Qué relación existe entre los valores de la energía almacenada si la fatiga máxima es la misma en ambos

Respuesta:

$$\frac{1}{2} : 1.$$

¹ La distribución de fatigas se ha supuesto ser la de un eje circular sometido a torsión.

5. Un eje circular de acero con un volante en un extremo gira a 120 r. p. m. Se detiene bruscamente por el otro extremo. Determinar la fatiga máxima en el eje durante el choque si la longitud del eje es $l = 1,5 \text{ m.}$, el diámetro $d = 5 \text{ cm.}$, el peso del volante $W = 50 \text{ kg.}$ y su radio de giro $r = 25 \text{ cm.}$ $G = 9,2 \times 10^6 \text{ kg./cm.}^2$.

Solución: La fatiga máxima se produce cuando la energía cinética del volante se transforma totalmente en energía de deformación por torsión del eje. La energía cinética del volante es

$$\frac{Wr^2\omega^2}{2g} = \frac{50 \times 25^2 \times (4\pi)^2}{2 \times 981} = 2562,5 \text{ kg. cm.}$$

Sustituyendo este valor de U en la ecuación (181),

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{16 \times 9,2 \times 10^6 \times 2.562,5}{\pi \times 5^2 \times 150}} = 1792 \text{ kg./cm.}^2$$

6. Dos barras circulares del mismo material y la misma longitud, pero de diferentes secciones A y A_1 , están sometidos a torsión por la acción del mismo momento torsor. ¿Qué relación existe entre los valores de la energía de deformación almacenada en las dos barras?

Respuesta: Son inversamente proporcionales a los cuadrados de las áreas de las secciones rectas.

66. Energía elástica de deformación en la flexión.—Empezaremos por el caso de flexión pura. Para una barra prismática empotrada en un extremo y flexada (fig. 249) por un par M , aplicado en el otro, el desplazamiento angular en el extremo libre es

$$\varphi = \frac{Ml}{EI_z}.$$

(a)

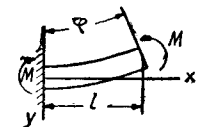


FIG. 249

Este desplazamiento es proporcional al momento flector M , y empleando un diagrama análogo al de la figura 248 puede deducirse, por un razonamiento análogo, que el trabajo suministrado durante la deformación por el momento flector M , o, lo que es lo mismo, la energía almacenada por la barra es

$$U = \frac{M\varphi}{2}. \quad (b)$$

Empleando la ecuación (a) esta energía puede expresarse por una de estas formas:

$$U = \frac{M^2 l}{2EI_z}; \quad (184) \quad U = \frac{\varphi^2 EI_z}{2l}. \quad (185)$$

A veces interesa expresar la energía potencial como una función de la fatiga normal máxima $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{Z}$. Para una sección rectangular se tendrá $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{6M}{bh^2}$, o $M = \frac{bh^2\sigma_{m\acute{a}x}}{6}$, y la ecuación (184) da

$$U = \frac{1}{3} bhl \frac{\sigma_{m\acute{a}x}^2}{2E} \tag{186}$$

En este caso se ve que la energía total es sólo la tercera parte de la que correspondería al caso de que todas las fibras sufriesen la fatiga $\sigma_{m\acute{a}x}$.

En el caso de flexión por fuerzas transversales a la barra despreciaremos, en principio, la energía por cortadura. La energía almacenada por un elemento de viga de longitud dx —ecuaciones (184) y (185)— será

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI_z} \quad \text{ó} \quad dU = \frac{EI_z (d\varphi)^2}{2dx}$$

El momento flector M es variable respecto a x , y

$$d\varphi = \frac{dx}{r} = \left| \frac{d^2y}{dx^2} \right| dx$$

(véase pág. 130). La energía total almacenada en la barra es, por consiguiente,

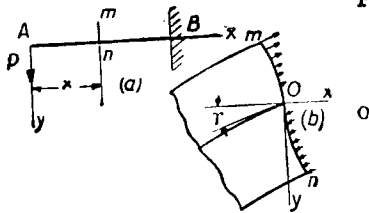


FIG. 250

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI_z} \tag{187}$$

$$U = \int_0^l \frac{EI_z}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \tag{188}$$

Sea, por ejemplo, el voladizo AB (fig. 250). El momento flector para una sección cualquiera mn es $M = -Px$. Sustituyendo en la ecuación (187), da

$$U = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EI_z} = \frac{Pl^3}{6EI_z} \tag{c}$$

Para una barra rectangular, $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{6Pl}{bh^2}$, y la ecuación (c) puede ponerse en la forma

$$U = \frac{1}{9} bhl \frac{\sigma_{m\acute{a}x}^2}{2E} \tag{c'}$$

Esta expresión indica que la cantidad de energía que puede almacenarse en una viga rectangular en voladizo, cargada en su extremo, sin que se produzca deformación permanente, es un tercio de la que se puede almacenar por flexión pura y solamente la novena parte de la correspondiente a la extensión simple de la misma barra. Esta consideración tiene importancia en el proyecto de resortes, puesto que éstos deben absorber una cantidad dada de energía sin deterioro y deben tener el menor peso posible. La cantidad de energía que puede absorber un voladizo se aumenta haciéndolo de sección variable. Por ejemplo, un voladizo en sólido, de igual resistencia a la flexión, de sección rectangular, de altura h constante (fig. 185), tiene, para valores iguales de P , h y $\sigma_{m\acute{a}x}$, una flecha y , por consiguiente, una cantidad de energía almacenada, que es sólo el 50 por 100 mayor del valor que corresponde a la barra de sección uniforme. Al mismo tiempo, el voladizo de resistencia uniforme pesa la mitad de la barra prismática, lo que en definitiva indica que puede almacenar el triple de energía por kilogramo de material.

Volviendo a la ecuación (c), e igualando la energía de deformación al trabajo suministrado por la carga P durante la deformación, se tiene

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EI_z} \tag{d}$$

de donde

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z}$$

Este valor de la flecha coincide con el de la ecuación (95). La flecha adicional debida a las fuerzas cortantes puede determinarse también mediante la energía potencial de deformación. Para el voladizo de la figura 250, de sección rectan-

gular, la fatiga cortante a la distancia y del eje neutro es (véase ecuación 65)

$$\frac{P}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

La energía por cortadura en un volumen elemental $bdxdy$, en virtud de la ecuación (179), será

$$\frac{P^2}{8GI_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 bdx dy,$$

y la energía total por cortadura es

$$U = \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{P^2}{8GI_z^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 bdx dy = \frac{P^2 l h^2}{20GI_z} \quad (e)$$

Esta energía debe añadirse al segundo miembro de la ecuación (d)¹ para obtener la flecha total. Se tendrá

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EI_z} + \frac{P^2 l h^2}{20GI_z}, \quad (f)$$

y, por consiguiente,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z} \left(l + \frac{3}{10} \frac{h^2 E}{l^2 G} \right). \quad (g)$$

El segundo término del paréntesis representa el efecto de las fatigas cortantes en la flecha de la viga. Empleando el método desarrollado en el artículo 39, en la hipótesis de que el elemento afecto al centro de gravedad de la sección empotrada permanece vertical (fig. 250), el giro adicional debido a la cortadura será

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{3}{2} \frac{P}{bhG},$$

y la flecha adicional resultará

$$\frac{3}{2} \frac{Pl}{bhG};$$

por consiguiente,

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{3}{2} \frac{Pl}{bhG} = \frac{Pl^3}{3EI_z} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{h^2}{l^2} \frac{E}{G} \right). \quad (g')$$

¹ Como las fatigas cortantes que actúan sobre un elemento (figura 247) no modifican las longitudes de los lados del elemento, si sobre esas caras actúan fatigas normales, éstas no producen trabajo durante la distorsión. Por esta razón, la energía total es simplemente la suma de las dos cantidades de energía.

Como se ve, las ecuaciones (g) y (g') no coinciden; la diferencia se explica del modo siguiente: Las consecuencias del artículo 39 se obtuvieron en la hipótesis de que las secciones de la barra se podían alabea libremente por la acción de las fatigas cortantes. En este caso la sección empotrada deberá curvarse, tomando la forma *mon* —fig. 250 (b)—, y al calcular el trabajo total desarrollado en la ménsula debe considerarse no solamente el trabajo realizado por la fuerza P —fig. 250 (a)—, sino el que efectúan las fatigas ligadas a la sección empotrada —figura 250 (b)—. Tomando en consideración este último trabajo, la flecha calculada por medio de la energía de deformación coincide con la obtenida en el artículo 39 y dada por la ecuación (g')¹.

En el caso de una viga simplemente apoyada, cargada en su centro, la sección media de la pieza no alabea por consideraciones de simetría. En este caso la ecuación (g), aplicada a cada mitad de la viga, dará un resultado más exacto para la flecha que la ecuación (g'). Puede comprobarse comparando las ecuaciones aproximadas (g) y (g') con la solución, más correcta, dada en el artículo 39.

Problemas

1. Una viga de madera en voladizo de 1,80 de longitud y sección rectangular de 20 cm. \times 12,5 cm. está sometida a la acción de una carga uniforme de $\frac{10}{3}$ kg. por cm. Determinar la energía de deformación almacenada si $E = 1,2 \times 10^5$ kg./cm.².

Respuesta:

$$U = \frac{q^2 l^5}{40EI_z} = \frac{10^2 \times 180^5 \times 12}{3^2 \times 40 \times 1,2 \times 10^5 \times 12,5 \times 20^3} = 52,5 \text{ kg./cm.}$$

2. ¿En qué proporción aumenta la energía de deformación calculada en el problema anterior si la altura de la viga es 12,5 cm. y el ancho 20 cm.?

Respuesta: La energía de deformación crece en la relación $\frac{8^3}{3^3}$.

3. Dos barras idénticas, una apoyada y la otra con los extremos empotrados, están flexadas por la acción de cargas concentradas iguales en su sección central. ¿En qué relación están los valores de la energía de deformación almacenada?

Respuesta: 4 : 1.

4. Resolver el problema anterior para una carga uniformemente distribuida de intensidad q sobre ambas barras.

¹ Véase *Theory of Elasticity*, pág. 150, 1934.

5. Dos vigas de la misma longitud y sección rectangular están igualmente cargadas; las secciones tienen el mismo ancho, pero las alturas están en la relación 2 : 1. Encontrar la relación entre las cantidades de energía de deformación almacenada.

Solución: Para una carga dada, la energía de deformación es proporcional a la flecha y ésta es inversamente proporcional al momento de inercia de la sección. Reduciendo la altura a la mitad, se hará ocho veces mayor la cantidad de energía de deformación.

67. **Flexión producida por choque.**—La flecha dinámica de una viga, originada por el choque de un cuerpo W que cae sobre ella, se puede determinar por procedimientos análogos a los empleados en el caso de que el choque produzca extensión (artículo 64). Sea, por ejemplo, una viga simplemente apoyada, percutida en el centro (fig. 251), y supongamos que la masa de la viga puede despreciarse frente a la masa del cuerpo que choca con ella y que las fatigas que se originan están por debajo del límite de fluencia. No habrá, por consiguiente, pérdida de energía en el choque, y el trabajo suministrado por el peso W durante su caída se transformará completamente en energía de deformación por flexión de la viga¹. Sea δ la flecha máxima de la viga durante el choque. Si suponemos que la elástica de la viga durante el choque tiene la misma forma que para una deformación estática, la fuerza capaz de originar dicha flecha sería (ecuación 90)

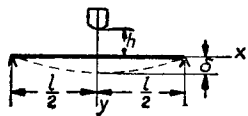


FIG. 251

$P = \frac{48EI_z}{l^3} \delta.$ (a)

La energía total almacenada por la viga es igual al trabajo suministrado por la fuerza P , o sea

$$U = \frac{P\delta}{2} = \delta^2 \frac{24EI_z}{l^3}.$$

Si h representa, como anteriormente, la altura de caída, la ecuación por la que se determina δ será

$$W(h + \delta) = \delta^2 \frac{24EI_z}{l^3}, \quad (b)$$

¹ La deformación local en la superficie de contacto de la carga y la viga se desprecia en este cálculo.

de donde

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2}, \quad (189)$$

siendo

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48EI_z} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

La ecuación (189) es de la misma forma que la que obtuvimos para el caso de extensión por choque, ecuación (172). Es interesante hacer notar que la forma de la ecuación es invariante para cualquier otro caso de choque con tal de que la flecha en el punto de choque sea proporcional a la fuerza P ejercida en dicho punto. Si representamos por α el factor de proporcionalidad, cuyo valor depende de la estructura, se tendrá

$$\alpha P = \delta \quad \text{y} \quad U = \frac{P\delta}{2} = \frac{\delta^2}{2\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$W(h + \delta) = \frac{\delta^2}{2\alpha},$$

y puesto que $\delta_{st} = W\alpha$, esta ecuación se reduce a la ecuación (189).

La flecha δ así calculada representa un límite superior, al que la flecha dinámica se acerca cuando no hay pérdidas de energía durante el choque. Las pérdidas de esta naturaleza reducen la flecha dinámica dada por la ecuación (189). Las fatigas correspondientes pueden hallarse multiplicando por $\frac{\delta}{\delta_{st}}$ las fatigas obtenidas por la aplicación estática de la carga W . Cuando h es grande comparada con δ_{st} , la ecuación (189) puede ponerse en la forma más sencilla

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2}. \quad (c)$$

Para el caso de una viga apoyada en los extremos y percutida en el centro esta ecuación da

$$\delta = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{l^3}{24EI_z}}. \quad (d)$$

El momento flector máximo es en este caso

$$M_{\text{máx}} = \frac{Pl}{4} = \frac{\delta 48 EI_z l}{l^3 4}$$

y

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_{\text{máx}}}{Z} = \frac{\delta 48 EI_z l}{l^3 4Z}$$

Para una sección rectangular, empleando la ecuación (d),

$$\sigma_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{18E}{lA}} \quad (e)$$

Esta expresión indica que la fatiga máxima depende de la energía cinética del cuerpo que cae y del volumen lA de la viga.

Para determinar el efecto de la masa de la viga sobre la flecha máxima se supondrá que la elástica, durante el choque, tiene la misma forma que para una deformación estática.

Con esta hipótesis se deduce¹ que la masa reducida para una viga apoyada en sus extremos es $\frac{17}{35} \frac{ql}{g}$, y, por consiguiente, que la velocidad común que se establece al comenzar el choque es

$$v_a = \frac{W}{W + \frac{17}{35} ql} v.$$

La energía cinética total después de establecerse la velocidad común v_a es

$$\frac{v_a^2}{2g} \left(W + \frac{17}{35} ql \right) = \frac{Wv^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{W}};$$

poniendo este valor en lugar de

$$\frac{Wv^2}{2g} = Wh$$

en la ecuación (b), se obtiene

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{\delta_{st} v^2}{g \left(1 + \frac{17}{35} \frac{ql}{W} \right)}} \quad (190)$$

¹ Véase publicación de Homersham Cox, mencionada anteriormente (pág. 282).

Esta expresión ya tiene en cuenta el efecto de la masa de la viga en la flecha¹.

En el caso de un voladizo, si el peso W ataca a la viga en el extremo, el valor de la masa reducida de la viga es $\frac{33}{140} \frac{ql}{g}$.

Cuando una viga simplemente apoyada en sus extremos sufre el choque en un punto cuyas distancias a los extremos son a y b , respectivamente, la masa reducida es

$$\frac{1}{105} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{l^2}{ab} \right)^2 \right] \frac{ql}{g}$$

Problemas

1. Una viga de madera de sección rectangular, apoyada en sus extremos y cuya longitud es 2,70 m. sufre en su centro un choque ocasionado por un peso de 20 kg. que cae desde una altura $h = 30$ cm. Determinar el área necesaria en la sección recta si la fatiga de trabajo es $\sigma_t = 80$ kg./cm.² y $E = 1,2 \times 10^5$ kg./cm.².

Solución: Empleando la ecuación (e), página 296²,

$$A = \frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{18E}{l\sigma_t^2} = 20 \times 30 \times \frac{18 \times 1,2 \times 10^5}{270 \times 80^2} = 750 \text{ cm.}^2$$

2. ¿En qué proporción cambia el área del problema anterior si 1.º la luz de la viga aumenta de 2,7 a 3,6 m., y 2.º, si el peso W aumenta en el 50 por 100?

Respuesta: 1.º El área disminuye en la relación 3 : 4. 2.º El área aumenta en el 50 por 100.

3. Un peso $W = 50$ kg. cae desde una altura de 30 cm. sobre el centro de una viga de sección en I apoyada en sus extremos y cuya

¹ Diversos ejemplos en los que se aplica esta ecuación figuran en la publicación del profesor Tschetsche, *Zeitschr. d. Ver. d. Ing.*, página 134, 1894. Un estudio más detallado del choque transversal sobre una viga se basa en la investigación de las vibraciones laterales, unido al estudio de la deformación local en el punto de choque. Véase De Saint Venant, loc. cit., pág. 537, nota final del párrafo 61; C. R., vol. 45, página 204, 1857. Véase también S. Timoshenko, *Ztschr. f. Math. u. Phys.*, vol. 62, pág. 198, 1913. Diversos ensayos con vigas sujetas a choque han sido realizados en Suiza, dando resultados de acuerdo con la teoría. Véase *Tech. Komm. d. Verband, Schweiz Brückenbau u. Eisenhochbau-fabriken*, Bericht von M. Roß, marzo, 1922. Véase también los recientes artículos de Tuzi (Z.), y Nisida (M.), *Phil. Mag.* (7), vol. 21, pág. 448, y R. N. Arnold, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers*, volumen 137, 1937, pág. 217.

² La deformación local en la superficie de contacto de la carga con la viga se desprecia en este cálculo.

longitud es 3 m. Encontrar las dimensiones de la sección para $\sigma_t = 2.400$ kg./cm.², $E = 2,4 \times 10^6$ kg./cm.².

Solución: Despreciando δ_{st} frente a h (véase ecuación c), la relación entre la flecha dinámica y la estática será:

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}$$

Si la elástica durante el choque tiene la misma forma que la deformación estática, las fatigas máximas de flexión estarán en la misma relación que las flechas, y por consiguiente,

$$\sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} \cdot \frac{Wl}{4Z} = \sigma_t,$$

de donde

$$\frac{Z}{c} = \frac{6EW h}{\sigma_t^2 l},$$

siendo Z el momento resistente de la sección y c la distancia de la fibra más alejada a la línea neutra, o sea la mitad de la altura de la viga en nuestro caso. Sustituyendo los datos numéricos, se tiene:

$$\frac{Z}{c} = \frac{6 \times 2,4 \times 10^6 \times 50 \times 30}{2,400^2 \times 300} = 12,50 \text{ cm.}^2$$

Se necesitará un perfil en I de 12,5 cm. de altura, cuyo peso es 20,4 kg./m.

4. ¿Qué fatiga producirá en la viga del problema anterior un peso de 100 kg., cayendo sobre el centro de la viga desde una altura de 15 cm.?

Respuesta:

$$\sigma_{\text{máx}} = 2.312 \text{ kg./cm.}^2.$$

5. Una viga de madera en voladizo tiene 1,80 m. de longitud y una sección cuadrada de 30 × 30 cm. Sobre su extremo libre cae un peso $W = 50$ kg. desde una altura $h = 30$ cm. Determinar la flecha máxima teniendo en cuenta la pérdida de energía debida a la masa de la viga.

Solución: Despreciando δ_{st} frente a h , la ecuación análoga a la (190) da

$$\delta = \sqrt{\frac{\delta_{st} v^2}{g} \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \frac{ql}{W}}}$$

para $ql = 120$ kg.,

$$\delta = \sqrt{\delta_{st} \frac{60}{1 + \frac{33 \times 120}{140 \times 50}}} = 0,68 \text{ cm.}$$

6. Una viga apoyada en sus extremos sufre una percusión en su centro por la acción de un peso W que cae desde una altura h . Despre-

ciendo δ_{st} frente a h , encontrar el valor de la relación $\frac{ql}{W}$ tal que el efecto de la masa de la viga reduzca la flecha dinámica en un 10 por 100.

Respuesta:

$$\frac{ql}{W} = 0,483.$$

68. La expresión general de la energía de deformación.—Al examinar los problemas de tensión, compresión, torsión y flexión se ha visto que la energía de deformación puede representarse en todos los casos por una función de segundo grado en las fuerzas exteriores (ecuaciones 168, 177 y 184), o por una función de segundo grado en los desplazamientos (ecuaciones 169, 178 y 185). La expresión general de la energía de deformación de un cuerpo elástico tiene también esta forma siempre que se verifiquen las siguientes condiciones: que el material siga la ley de Hooke, y que las condiciones del problema sean tales que los pequeños corrimientos debidos a la deformación no afecten a la acción de las fuerzas exteriores y sean despreciables para el cálculo de las fatigas¹. Con estas condiciones los desplazamientos de un sistema elástico son funciones lineales de las cargas exteriores, y si estas cargas aumentan en una cierta relación, todos los desplazamientos aumentan en la misma proporción. Consideremos un cuerpo sometido a la acción de las fuerzas exteriores P_1, P_2 y $P_3 \dots$ (fig. 252), y apoyado de tal modo que le sea imposible todo movimiento como cuerpo rígido. Sean $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$ los corrimientos elásticos de los puntos de aplicación de las fuerzas, medido cada uno en la dirección de la fuerza correspondiente². Si las fuerzas externas aumentan gradualmente de modo que estén siempre en equilibrio con las fuerzas elásticas internas, el trabajo por ellas realizado durante la de-

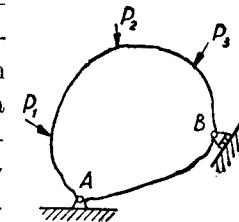


FIG. 252

¹ Diversos problemas, tales como la flexión de barras por fuerzas transversales unida a extensión o compresión axial no satisfacen a las condiciones anteriores. Con referencia a estos casos de excepción, véase el artículo 72.

² Los corrimientos de los puntos en direcciones perpendiculares a las fuerzas correspondientes no se tienen en cuenta en el estudio que sigue.

formación será igual a la energía de deformación almacenada por el cuerpo deformado. El valor de esta energía no depende del orden en que se apliquen las fuerzas, sino solamente de sus valores finales. Supongamos que todas las fuerzas externas $P_1, P_2, P_3 \dots$, aumentan simultáneamente en la misma relación; en este caso la relación entre cada fuerza y su corrimiento correspondiente puede representarse por un diagrama análogo al de la figura 241, y el trabajo suministrado por todas las fuerzas $P_1, P_2, P_3 \dots$, igual a la energía de deformación almacenada en el cuerpo, será

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta_3}{2} + \dots, \quad (191)$$

es decir, la energía total de deformación es igual a la mitad de la suma de los productos de cada fuerza exterior por el corrimiento correspondiente¹. En las hipótesis hechas anteriormente, los desplazamientos $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$, son funciones lineales de las fuerzas $P_1, P_2, P_3 \dots$. La sustitución de estas funciones en la ecuación (191) da una expresión general de la energía de deformación, en forma de función homogénea de segundo grado, en las fuerzas exteriores. Si las fuerzas se representan como funciones lineales de los corrimientos, y estas funciones se sustituyen en la ecuación (191), obtendremos una expresión para la energía de deformación, en forma de función homogénea de segundo grado, en los corrimientos.

En lo expuesto anteriormente no se han considerado las reacciones en los apoyos. El trabajo suministrado por estas reacciones durante la deformación es igual a cero, puesto que el desplazamiento de un apoyo fijo, tal como A (fig. 252), es nulo, y el corrimiento de un apoyo móvil, tal como B , es perpendicular a la reacción, despreciando el rozamiento en el apoyo. Por consiguiente, las reacciones no figuran en la expresión de la energía potencial (191).

Consideremos la energía almacenada en un elemento cúbico sometido a extensión, uniforme en tres direcciones perpendicu-

lares (fig. 50). Si la arista del cubo es la unidad de longitud, las fuerzas extensoras en sus caras, numéricamente, serán $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, y los alargamientos correspondientes $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Por consiguiente, la energía de deformación almacenada en un centímetro cúbico, —ecuación (191)—, será

$$w = \frac{\sigma_x \epsilon_x}{2} + \frac{\sigma_y \epsilon_y}{2} + \frac{\sigma_z \epsilon_z}{2}.$$

Sustituyendo, en vez de los alargamientos, los valores dados por (43)¹,

$$w = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x). \quad (192)$$

Esta expresión se aplica también en el caso de que algunas de las fatigas normales sean compresiones; basta para ello atribuirles signo negativo.

Si en unión de las fatigas normales hay fatigas cortantes ligadas a las caras del elemento, debe sumarse la energía cortante correspondiente (véase pág. 292), y empleando la ecuación (179) se tendrá como expresión total de la energía almacenada en un centímetro cúbico

$$w = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (193)$$

Como segundo ejemplo consideraremos una viga apoyada en los extremos, cargada en el centro con una fuerza P y flexada por un par M , aplicado en el extremo A . La flecha en el centro, ecuaciones (90) y (105), será

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Ml^2}{16EI}. \quad (a)$$

El giro en el extremo A —ecuaciones (88) y (104)— es

$$\theta = \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Ml}{3EI}. \quad (b)$$

¹ Los cambios de temperatura debidos a la deformación no se consideran de importancia práctica. Para una discusión más detallada, véase el libro de T. Weyrauch *Theorie elastischer Körper*, pág. 163, Leipzig, 1884. Véase también *Z. f. Architektur und Ingenieurwesen*, vol. 54, páginas 91 y 277, 1908.

¹ Esta conclusión fué obtenida por primera vez por Clapeyron véase Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, 2.^a ed. página 79, 1866.

Por consiguiente, la energía de deformación de la viga, igual al trabajo suministrado por la fuerza P y el par M , será

$$U = \frac{P\delta}{2} + \frac{M\theta}{2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{P^2 l^3}{96} + \frac{M^2 l}{6} + \frac{MPl^2}{16} \right). \quad (c)$$

Esta expresión es una función homogénea de segundo grado en la fuerza y par exteriores. Resolviendo las ecuaciones (a) y (b) en M y P , y sustituyendo sus valores en la ecuación (c), se obtendrá la expresión de la energía de deformación, en forma de función homogénea de segundo grado en los corrimientos. Se habrá observado que cuando sobre el cuerpo actúan pares los corrimientos correspondientes son los giros de los elementos de superficie sobre los que dichos pares actúan.

69. **El teorema de Castigliano.**—Puede establecerse, deducido de la expresión de la energía de deformación en los diversos casos, un método muy sencillo para el cálculo de los corrimientos de los puntos de un cuerpo elástico durante la deformación. Por ejemplo, en el caso de extensión simple (fig. 1), la energía de deformación viene dada por la ecuación (168),

$$U = \frac{P^2 l}{2AE},$$

tomando la derivada de esta expresión respecto a P , se obtiene

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl}{AE} = \delta,$$

es decir, la derivada de la energía de deformación, con relación a la carga, da el desplazamiento correspondiente a la carga, o sea lo que el punto de aplicación de la carga se desplaza en la dirección de la carga. En el caso de un voladizo cargado en el extremo libre, la energía de deformación es (ecuación c, página 290)

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

La derivada de esta expresión, con relación a la carga P , da la flecha en el extremo libre $\frac{Pl^3}{3EI}$.

En la torsión de un árbol circular la energía de deformación es (ecuación 182)

$$\frac{M_t^2 l}{2GI_p}.$$

La derivada de esta expresión con relación al momento torsor da

$$\frac{dU}{dM_t} = \frac{M_t l}{GI_p} = \varphi,$$

donde φ es el ángulo de torsión de eje y representa el corrimiento correspondiente al momento torsor.

Cuando actúan varias cargas sobre un cuerpo elástico puede utilizarse el mismo procedimiento para el cálculo de los corrimientos; por ejemplo, la expresión (c) del párrafo anterior da la energía de deformación de una viga flexada por una carga P , concentrada en su centro, y por un par M en el extremo. La derivada parcial de esta expresión, con relación a P , da la flecha en el punto de acción de la carga, y la derivada parcial, respecto a M , da el ángulo de rotación del extremo de la viga en que actúa el par M .

El teorema de Castigliano es una generalización de estos resultados¹. Si el material del sistema sigue la ley de Hooke, y las condiciones son tales que los pequeños desplazamientos debidos a la deformación pueden despreciarse al analizar el modo de obrar las fuerzas, la energía de deformación de un sistema puede expresarse por una función homogénea de segundo grado de las fuerzas exteriores (véase artículo 68), y su derivada parcial, con relación a una fuerza cualquiera, da el desplazamiento correspondiente a dicha fuerza (véase artículo 72 para casos de excepción). Los términos fuerza y corrimiento tienen en este caso un significado más amplio que el corriente, incluyendo los de par y corrimiento angular, respectivamente. Consideremos un caso general (fig. 252). Supongamos que la energía de deforma-

¹ Véase la publicación de Castigliano *Nuova teoria intorno dell' equilibrio dei sistemi elastici* (Atti della Accademia delle scienze, Torino, 1875). Véase también su *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Turin, 1879. Para una traducción inglesa del trabajo de Castigliano, véase E. S. Andrews, London, 1919.

ción está expresada como función de las fuerzas P_1, P_2, P_3, \dots , es decir, que

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \dots) \quad (a)$$

Si se da un pequeño aumento dP_n a cualquier fuerza exterior P_n , la energía de deformación tomará un nuevo valor, que será

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \quad (b)$$

Pero el valor de la energía de deformación no depende del orden por el que las cargas se apliquen al cuerpo y solamente depende de sus valores finales. Puede suponerse, por consiguiente, que la carga infinitesimal dP_n se aplica primeramente, y después las cargas P_1, P_2, P_3, \dots . El valor final de la energía de deformación será el mismo que da la ecuación (b). La carga dP_n , aplicada primeramente, produce un desplazamiento infinitesimal, y el trabajo suministrado es una cantidad de segundo orden que puede despreciarse. Aplicando ahora las cargas P_1, P_2, P_3, \dots , se observará que sus efectos no se modifican por la aplicación previa de la carga dP_n , y que el trabajo suministrado por dichas cargas será el mismo valor U , ecuación (a) anterior. Pero durante la aplicación de estas fuerzas la carga dP_n se habrá desplazado δ_n en la dirección de P_n y ha realizado un trabajo $(dP_n)\delta_n$. Las dos expresiones del trabajo deben ser iguales; por consiguiente,

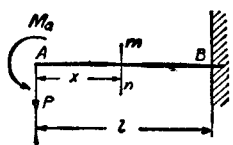


FIG. 253

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} (dP_n) = U + (dP_n)\delta_n$$

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \quad (194)$$

Como una aplicación del teorema consideraremos una ménsula cargada con una fuerza P , y un par M_a en el extremo (fig. 253). El momento flector en la sección mn es $M = -Px - M_a$, y la energía de deformación —ecuación (184)— será

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2 EI}$$

¹ Esto se deduce de las condiciones establecidas en la página 300, en virtud de las que la energía de deformación se obtuvo en forma de función homogénea de segundo grado.

Para obtener la flecha δ en el extremo de la ménsula se tomará la derivada parcial de U , respecto a P , lo que da

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Sustituyendo el valor de M en función de P y M_a , se obtiene

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^l (Px + M_a) x dx = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{M_a l^2}{2EI}$$

Esta misma expresión puede obtenerse utilizando cualquier método de los ya explicados, tal como el de la viga conjugada.

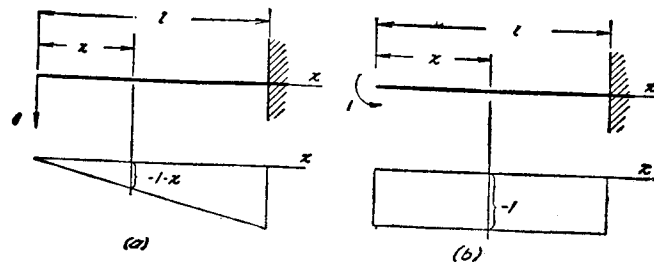


FIG. 254

Para obtener el giro en el extremo calcularemos la derivada parcial de la energía de deformación respecto al par M_a . Por consiguiente,

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_a} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l (Px + M_a) dx = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{M_a l}{EI}$$

El signo positivo que hemos obtenido para δ y θ indica que la flecha y el giro del extremo tienen la misma dirección que señalan la fuerza y el par de la figura 253.

Debe notarse que la derivada parcial $\frac{\partial M}{\partial P}$ indica el módulo de crecimiento del momento M con relación a la carga P , y puede materializarse por el diagrama del momento flector correspondiente a una carga unidad —véase fig. 254 (a)—. La derivada parcial $\frac{\partial M}{\partial M_a}$ se materializa en forma análoga por el dia-

grama del momento flector en la figura 254 (b). Empleando las notaciones

$$\frac{\partial M}{\partial P} = M'_p \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial M_a} = M'_m$$

pueden escribirse los resultados obtenidos en la forma siguiente:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^l M M'_p dx; \quad \theta = \frac{1}{EI} \int_0^l M M'_m dx. \quad (195)$$

Estas ecuaciones, obtenidas para el caso particular de la figura 253, son válidas para el caso general de una viga con cualquier clase de carga y sustentada de cualquier forma. También pueden emplearse en el caso de carga distribuida.

Consideremos, por ejemplo, el caso de una viga simplemente apoyada y cargada uniformemente (fig. 255) y calculemos la

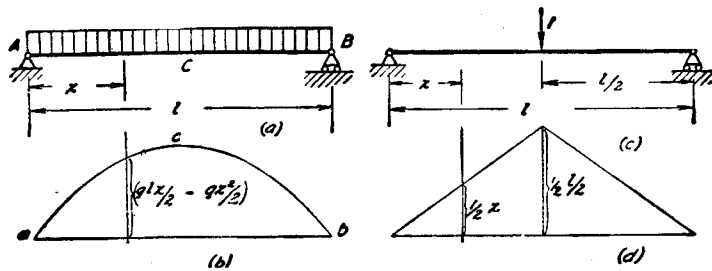


FIG. 255

flecha en el centro de esta viga mediante el teorema de Castigliano. En los casos anteriores actuaban las fuerzas y momentos concentrados y las derivadas parciales respecto a ellos daban los corrimientos y giros. En el caso de una carga uniforme no existe ninguna fuerza vertical concentrada en el centro de la viga y no podemos resolver el problema del modo expuesto anteriormente. La dificultad se obvia fácilmente suponiendo que en el centro de la viga obra una carga ficticia P de valor infinitesimal. Una fuerza tal no modifica, evidentemente, ni la flecha ni el diagrama del momento flector representado en la figura 255 (b). Al mismo tiempo, la relación del incremento del momento flector al incremento de P , es decir, la $\frac{\partial M}{\partial P}$, viene materializada

por la figura 255 (c) y (d). Con estos valores de M y $\frac{\partial M}{\partial P}$ el valor de la flecha es

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx.$$

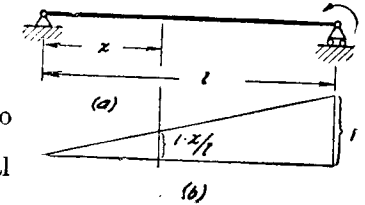


FIG. 256

Observando que tanto M como $\frac{\partial M}{\partial P}$ son simétricos con relación al centro del vano, se obtiene

$$\delta = \frac{2}{EI_z} \int_0^{l/2} M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{2}{EI_z} \int_0^{l/2} \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI_z}.$$

Si se quiere calcular el giro en el extremo B de la viga representada en la figura 255 (a) mediante el teorema de Castigliano, basta suponer infinitamente pequeño el par M_b aplicado en B . Un par de este valor no modifica el diagrama del momento flector —fig. 255 (b)—. La

derivada parcial $\frac{\partial M}{\partial M_b}$ se ve en la figura 256 (a) y (b). El giro pedido correspondiente al extremo B de la viga será

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{l} dx \\ &= \frac{ql^3}{24 EI_z}. \end{aligned}$$

Se ve que los resultados obtenidos mediante el teorema de Castigliano coinciden con los obtenidos anteriormente (pág. 133).

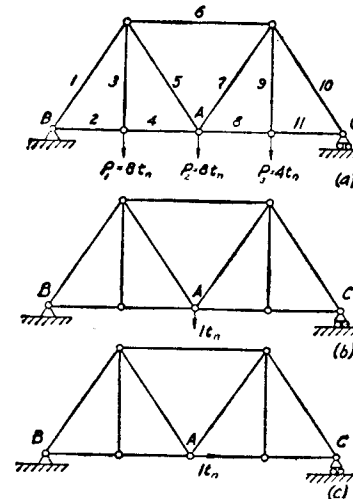


FIG. 257

El teorema de Castigliano es de gran utilidad para el cálculo de deformaciones en los entramados. Sea, por ejemplo, el sistema de la figura 257. Cada barra tiene un número y sus longi-

tudes y áreas de las secciones rectas figuran en la tabla correspondiente. La tensión S_i producida en cualquier barra i del sistema por las cargas P_1, P_2, P_3 , se calcula fácilmente por las ecuaciones de la estática para el equilibrio de los nudos. Dichas fuerzas S_i figuran en la cuarta columna de la tabla indicada.

1	2	3	4	5	6	7
i	l_i cm.	A_i cm. ²	S_i tn.	S'_i	$\frac{S_i S'_i l_i}{A_i}$	S'_i
1	625	37,5	-13,75	-0,625	143,2	0
2	375	18,75	8,25	0,375	62	1
3	500	12,50	8,00	0	0	0
4	375	18,75	8,25	0,375	62	1
5	625	12,50	3,75	0,625	117,2	0
6	750	25	-10,50	-0,750	23,6	0
7	625	12,5	6,25	0,625	195,2	0
8	375	18,75	6,75	0,375	50,8	0
9	500	12,50	4,00	0	0	0
10	625	37,50	-11,25	-0,625	117,2	0
11	375	18,75	6,75	0,375	50,8	0

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S'_i l_i}{A_i} = 822.$$

La energía de deformación de cualquier barra i —ecuación (168)— es $\frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E}$.

La energía de deformación total del sistema será

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E}, \quad (196)$$

donde la sumación se extenderá a todas las barras del sistema. En nuestro caso, $m = 11$. Las fuerzas S_i son funciones de las cargas P , y la flecha δ_n en el punto de aplicación de una carga cualquiera P_n será (ecuación 194)

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial P_n}. \quad (197)$$

La derivada $\frac{\partial S_i}{\partial P_n}$ es la relación de aumento de la fuerza S_i con el aumento de carga P_n . Su valor numérico es igual a la tensión producida en la barra i por una carga unidad aplicada en el lugar de P_n y esta propiedad será la que utilizaremos para calcular dicha derivada. Las derivadas de ahora en adelante las representaremos por S'_i . La ecuación para el cálculo de las flechas será, pues,

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i S'_i l_i}{A_i E}. \quad (198)$$

Consideremos, por ejemplo, la flecha δ_2 correspondiente a P_2 en A —fig. 257 (a)—. Los valores S'_i recopilados en la quinta columna se obtendrán por las ecuaciones de equilibrio del entramado para las condiciones de carga de la figura 257 (b), en la que se ha prescindido de las cargas reales y se ha colocado una carga única de valor una tonelada en la articulación A y en la dirección de P_2 , o sea verticalmente. Calculados los valores de la columna sexta, utilizando los datos de las columnas segunda a quinta, la suma de estos resultados dividida por el módulo $E = 2 \times 10^3$ toneladas por cm.² da la flecha en A (ecuación 198),

$$\delta_2 = \frac{822}{2 \times 10^3} = 0,411 \text{ cm.}$$

Lo expuesto anteriormente se refiere a la determinación de corrimientos en los puntos de acción de las cargas exteriores y en el sentido de actuación de dichas cargas.

En el estudio de la deformación de un sistema elástico puede ser necesario calcular el corrimiento de un punto en el que no exista carga o el corrimiento de un punto en un sentido que no sea la dirección de la carga actuante. El método de Castigliano puede usarse también en este caso. Aplicaremos en el punto una carga imaginaria adicional Q en la dirección del corrimiento buscado y calcularemos la derivada $\frac{\partial U}{\partial Q}$. En esta derivada se hace cero la carga Q y se obtiene el corrimiento deseado. Vamos a calcular, por ejemplo, en el entramado de la figura 257 (a) el corrimiento horizontal del punto A . Aplicare-

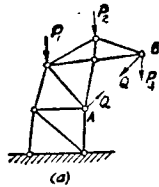
mos una fuerza horizontal Q en ese punto y el corrimiento horizontal correspondiente será

$$\delta_h = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \cdot \frac{\partial S_i}{\partial Q} \quad (d)$$

donde la sumación se extiende a todas las barras del entramado. Las fuerzas S_i en la ecuación (d) tienen el mismo significado que antes, puesto que la carga adicional Q es cero y las derivadas $\frac{\partial S_i}{\partial Q} = S_i''$ se obtienen como tensiones en las barras del entramado para el estado de carga de la figura 257 (c). Sus valores figuran en la columna séptima de la tabla ya citada. Sustituyendo estos valores en la ecuación (d), encontramos que el desplazamiento horizontal de A es igual a la suma de los alargamientos de las barras 2 y 4, ó sea

$$\delta_h = \frac{1}{E} \left(\frac{S_2 l_2}{A_2} + \frac{S_4 l_4}{A_4} \right) = \frac{375}{18,75 \times 2 \times 10^3} (8,25 + 8,25) = 0,165 \text{ cm.}$$

Al analizar la deformación de entramados es necesario algunas veces conocer el cambio de distancia que acontece entre dos puntos del sistema. Este problema puede resolverse también por el método de Castigliano.



Vamos a determinar, por ejemplo, la disminución δ de la distancia entre los puntos A y B de la figura 258 (a), producida por las cargas P_1, P_2, P_3 . Unamos a ellas dos cargas imaginarias Q aplicadas tal como se indica en la figura con líneas de puntos. Del teorema de Castigliano se deduce que la derivada parcial $\left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0}$ da en este caso la suma de los desplazamientos de A y B en la dirección AB , producidos por las cargas P_1, P_2, P_3 . Utilizando la ecuación (194), dicho desplazamiento será ¹

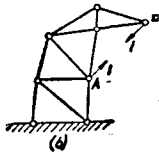


FIG. 258

este caso la suma de los desplazamientos de A y B en la dirección AB , producidos por las cargas P_1, P_2, P_3 . Utilizando la ecuación (194), dicho desplazamiento será ¹

$$\delta = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} \frac{\partial S_i}{\partial Q} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i l_i}{A_i E} S_i'' \quad (199)$$

¹ Este problema fué resuelto por J. C. Maxwell (*On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*, Phil. Mag. (4), vol. 27, página 294, 1864; *Scientific Papers*, vol. 1, pág. 598, Cambridge, 1890.

donde S_i son las fuerzas producidas en las barras por el sistema real de cargas P_1, P_2, P_3 ; las cantidades S_i' son las fuerzas producidas en las barras para el sistema de cargas de la figura 258 (b), donde se ha prescindido de todas las cargas reales y se han aplicado en A y B dos fuerzas unitarias iguales y opuestas; m es el número de barras.

Problemas

1. Determinar mediante el teorema de Castigliano la flecha y el giro en el extremo de una ménsula cargada uniformemente.

2. Determinar la flecha en el extremo B del voladizo de la viga de la figura 259.

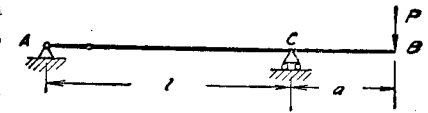


FIG. 259

3. Un sistema está formado por dos barras prismáticas de igual sección y longitud (fig. 260).

Sobre él actúa la carga P . Determinar el desplazamiento vertical de la articulación A .

Solución: La fuerza de extensión en la barra AB y la de compresión de la AC son iguales a P . Por consiguiente, la energía de deformación del sistema es

$$U = 2 \frac{P^2 l}{2 A E}$$

El corrimiento vertical de A será

$$\delta = \frac{dU}{dP} = \frac{2 Pl}{A E}$$

4. Determinar el corrimiento horizontal de la articulación A del problema anterior.

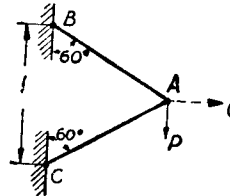


FIG. 260

Solución: Apliquemos una fuerza imaginaria horizontal Q tal como se indica en la figura 260 con línea de puntos. La energía potencial del sistema es

$$U = \frac{\left(P + \frac{1}{\sqrt{3}} Q \right)^2 l}{2 A E} + \frac{\left(P - \frac{1}{\sqrt{3}} Q \right)^2 l}{2 A E}$$

La derivada de esta expresión respecto a Q para $Q = 0$ da para el desplazamiento horizontal el valor

$$\delta_h = \left(\frac{\partial U}{\partial Q} \right)_{Q=0} = \left(\frac{2 Q l}{3 A E} \right)_{Q=0} = 0$$

5. Determinar el desplazamiento angular de la barra AB producida por la carga P en la figura 261.

Solución: Se aplica al sistema un par imaginario tal como se indica en la figura con línea de trazos. El desplazamiento angular corres-

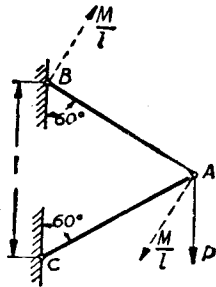


FIG. 261

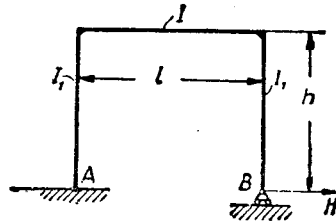


FIG. 262

pondiente a este par es el desplazamiento angular ϕ de la barra AB debido a la carga P. Las fuerzas S_p , en este caso, son:

$$P + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \text{ en la barra AB } \quad \text{y} \quad -P - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \text{ en la barra AC.}$$

La energía de deformación es

$$U = \frac{l}{2AE} \left[\left(P + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \right)^2 + \left(-P - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{M}{l} \right)^2 \right],$$

de donde

$$\phi = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0} = \left(\frac{P\sqrt{3}}{AE} + \frac{5M}{3lAE} \right)_{M=0} = \frac{P\sqrt{3}}{AE}.$$

6. ¿Qué desplazamiento horizontal produce en el apoyo B del pórtico de la figura 262 la fuerza horizontal H?

Respuesta:

$$\delta_h = \frac{2Hh^3}{3EI_1} + \frac{Hh^2l}{EI}$$

7. Determinar el desplazamiento vertical del punto A y el horizontal del punto C en el entramado de acero de la figura 263, si $P = 1.000 \text{ kg}$.

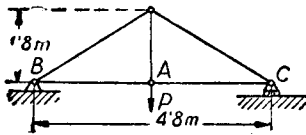


FIG. 263

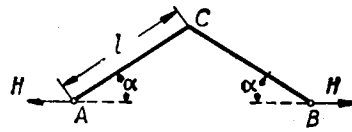


FIG. 264

el área de la sección recta de las piezas comprimidas es $31,25 \text{ cm}^2$ y la de las otras barras $12,5 \text{ cm}^2$.

8. Determinar el aumento de la distancia AB producida por las fuerzas H (fig. 264) si las barras AC y BC tienen las mismas dimensiones; solamente se tiene en cuenta la energía de deformación por flexión y se supone α lo suficientemente grande para que el efecto de la flecha en el valor del momento flector pueda despreciarse.

Respuesta:

$$\delta = \frac{2H \sin^2 \alpha l^3}{3EI}$$

9. Determinar la flecha a la distancia a del extremo izquierdo de la viga uniformemente cargada representada en la figura 255 (a).

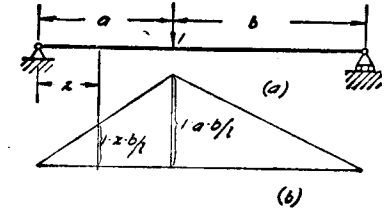


FIG. 265

Solución: Aplicando una carga P infinitamente pequeña a la distancia a del extremo izquierdo, la derivada $\frac{\partial M}{\partial P}$ está materializada en la figura 265 (a) y (b). Utilizando para M el diagrama parabólico de la figura 255 (b) la flecha buscada es

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{xb}{l} dx + \frac{1}{EI} \int_b^l \left(\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{a(l-x)}{l} dx = \frac{qab}{24EI} (a^2 + b^2 + 3ab).$$

Escribiendo x en vez de a y l-x en lugar de b, se obtiene la expresión de la elástica de acuerdo con los resultados dados en la página 133.

70. Aplicación del teorema de Castigliano a la resolución de problemas estáticamente indeterminados.—El teorema de Castigliano se utiliza frecuentemente en la resolución de problemas estáticamente indeterminados. Estudiaremos primeramente aquellos problemas en los que las cantidades hiperestáticas forman parte de las ligaduras, es decir, son elementos del sistema de reacción en los apoyos. Sean X, Y, Z... las fuerzas de reacción estáticamente indeterminadas. La energía de deformación del sistema será una función de estas fuerzas. Para apoyos fijos o apoyos cuyo movimiento sea perpendicular a la dirección de las reacciones, las derivadas parciales de la energía de deformación respecto a las fuerzas desconocidas deberán ser nulas, de acuerdo con el teorema de Castigliano. Por consiguiente,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0; \quad \dots \quad (200)$$

De este modo se tienen tantas ecuaciones como reacciones hiperestáticas.

Se observará que las ecuaciones (200) representan las condiciones de mínimo de la función U , lo que nos dice que las fuerzas de reacción hiperestáticas toman los valores necesarios para que sea mínima la energía de deformación del sistema. Esta propiedad constituye el principio del trabajo

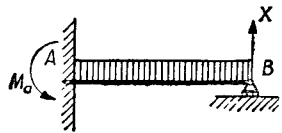


FIG. 266

mínimo tal como se aplica a la determinación de ligaduras hiperestáticas¹.

Como ejemplo de aplicación de este principio, consideraremos una viga empotrada por un extremo y apoyada por el otro, sometida a la acción de una carga uniformemente repartida (fig. 266). Este problema tiene una ligadura hiperestática. Tomando la reacción en el apoyo derecho X como ligadura hiperestática, se encontrará su valor por la condición

$$\frac{dU}{dX} = 0. \quad (a)$$

La energía de deformación de la viga, ecuación (187), es

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}, \quad (b)$$

en donde

$$M = Xx - \frac{qx^2}{2}.$$

Sustituyendo en (a), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(Xx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx \\ &= \frac{1}{EI} \left(X \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$X = \frac{3}{8} ql.$$

¹ El principio del trabajo mínimo fué establecido primeramente por F. Menabrea, en su artículo *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques*, Paris, C. R., vol. 46, pág. 1056, 1858. Véase también C. R., vol. 98, pág. 714, 1884. La demostra-

En lugar de la reacción X , pudo haberse tomado como ligadura hiperestática el par M_a en el empotramiento del extremo izquierdo de la viga. En ese caso habríamos expresado la energía de deformación en función de M_a . La ecuación (b) es válida. El momento flector para cualquier sección es

$$M = \left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2}.$$

Como la sección de empotramiento no gira cuando la viga se flexa, la derivada de la energía de deformación respecto a M_a deberá ser cero. Expresando analíticamente esta condición, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dM_a} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dM_a} dx = -\frac{1}{EI} \int_0^l \left[\left(\frac{ql}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx \\ &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{ql^3}{24} - \frac{M_a l}{3} \right) = 0, \end{aligned}$$

de donde el valor absoluto del momento es

$$M_a = \frac{ql^2}{8}.$$

Los problemas en que se consideren como cantidades hiperestáticas las tensiones que correspondan a las barras sobrantes de un sistema también pueden resolverse aplicando el teorema de Castigliano.

Sea, por ejemplo, el sistema representado en la figura 15, examinado anteriormente (véase pág. 19). Considerando la fuerza X en la barra vertical OC como cantidad hiperestática, las fuerzas en las barras inclinadas OB y OD son

$$\frac{P - X}{2 \cos \alpha}.$$

Representando por U_1 la energía de deformación de las ba-

ción completa del principio fué dada por Castigliano, quien hizo de este principio el método fundamental de la resolución de los sistemas hiperestáticos. La aplicación en la ingeniería de los métodos de la energía de deformación fué desarrollada por O. Mohr (véase su *Abhandlungen aus dem Gebiete d. technischen Mechanik*), por H. Müller-Breslau, en su libro *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, y F. Engesser, *Über die Berechnung statisch unbestimmter Systeme* (*Zentralbl. d. Bauverwalt.*, pág. 606, 1907). Una bibliografía muy completa de este asunto figura en el artículo de M. Grüning, *Encyclopädie d. Math. Wiss.*, volumen IV, 2, II, pág. 419.

rras inclinadas —fig. 267 (a)— y por U_2 la energía de deformación de la barra vertical —fig. 267 (b)—, la energía de deformación total del sistema es ¹

$$U = U_1 + U_2 = \left(\frac{P-X}{2 \cos \alpha}\right)^2 \frac{l}{AE \cos \alpha} + \frac{X^2 l}{2 AE} \quad (c)$$

Si δ es el desplazamiento real hacia abajo del nudo O de la figura 15, la derivada con relación a X de la energía U , del sistema de la figura 267 (a) será igual a $-\delta$, puesto que la fuerza X del sistema tiene dirección opuesta a la del desplazamiento δ . Al mismo tiempo, la derivada $\frac{\partial U_2}{\partial X}$ valdrá δ ; por consiguiente,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_1}{\partial X} + \frac{\partial U_2}{\partial X} = -\delta + \delta = 0. \quad (d)$$

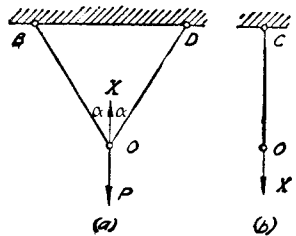


FIG. 267

Se ve que el verdadero valor de la fuerza X en la barra sobrante es el que hace mínima la energía de deformación total del sistema. Poniendo, en vez de U , su valor (c), en la ecuación (d) se obtiene

$$-\frac{(P-X)}{2 \cos^2 \alpha} \frac{l}{AE \cos \alpha} + \frac{Xl}{AE} = 0,$$

de donde

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

Un razonamiento análogo se aplica al caso de sistemas estáticamente indeterminados con una barra sobrante. Para fijar las ideas, consideremos la estructura de la figura 268 (a). Las reacciones pueden determinarse por las ecuaciones de la estática, es decir, el sistema está isostáticamente apoyado; pero al ir a determinar las tensiones en las barras, vemos que existe una barra sobrante. Supongamos que esta barra sobrante sea la CD . Quitaremos dicha barra, y en sus extremos C y D aplicaremos dos fuerzas X iguales a la tensión que le correspondería y, por consiguiente, opuestas entre sí. Tenemos ahora un sistema es-

¹ Se supone que todas las barras tienen el mismo módulo de elasticidad E y la misma sección A .

táticamente determinado sometido a la acción de la fuerza conocida P y de las dos desconocidas X . Las tensiones correspondientes a las barras de este sistema se podrán hallar calculando: primero, las que produce la carga real P y que representaremos por S_i^0 , siendo i el número de orden de la barra; segundo, las que se originan en dichas barras cuando se prescinde de la car-

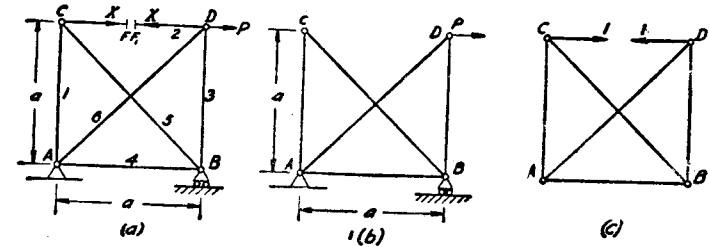


FIG. 268

ga exterior P y se pone en lugar de las fuerzas X dos fuerzas unidad —fig. 268 (c)—. Estas últimas tensiones o fuerzas interiores las representaremos por S_i . La fuerza interna correspondiente a cada barra, cuando actúan simultáneamente la fuerza P y las fuerzas X , serán

$$S_i = S_i^0 + S_i' X. \quad (e)$$

La energía de deformación total del sistema (ecuación 196), será

$$U = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^2 l_i}{2 A_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i' X)^2 l_i}{2 A_i E}. \quad (f)$$

La ecuación se extiende a todas las barras del sistema, incluso a la CD , de que habíamos prescindido ¹. Se aplica ahora el teorema de Castigliano y la derivada de U respecto a X da el desplazamiento de los extremos F y F_1 , el uno hacia el otro. En el caso actual, la barra es continua y este desplazamiento es cero. Por consiguiente,

$$\frac{dU}{dX} = 0, \quad (g)$$

es decir, la fuerza X en la barra sobrante es tal que hace mínima la energía de deformación del sistema.

¹ Para esta barra, $S_i^0 = 0$ y $S_i' = 1$.

Mediante las ecuaciones (f) y (g), tendremos

$$\frac{d}{dX} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i'X)^2 l_i}{2 A_i E} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(S_i^0 + S_i'X) l_i S_i'}{A_i E} = 0,$$

de donde

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^0 S_i' l_i}{A_i E}}{\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i'^2 l_i}{A_i E}}. \tag{201}$$

Este procedimiento es también aplicable a un sistema en el que existan varias barras sobrantes.

El principio del trabajo mínimo puede aplicarse también en el caso de que las cantidades hiperestáticas sean pares. Considere-

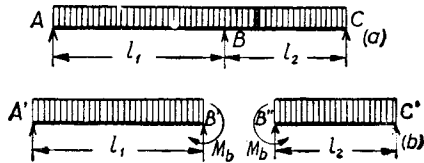


FIG. 269

remos, por ejemplo, una viga sobre tres apoyos uniformemente cargada (fig. 269). Si se toma como ligadura hiperestática el momento en el apoyo central y se corta la viga por el apoyo B, se obtendrán dos vigas apoyadas —fig. 269 (b)— cargadas con los pares desconocidos M_b , además de con la carga uniforme conocida de valor q . Al no existir rotación del extremo B' respecto al extremo B'' , debido a que en nuestro caso —fig. 269 (a)— la elástica es una curva continua,

$$\frac{dU}{dM_b} = 0. \tag{202}$$

Expresión que indica que también en este caso el valor que corresponde a la cantidad hiperestática hace mínima la energía de deformación del sistema.

Problemas

1. La carga vertical P está sostenida por una barra vertical DB de longitud l y sección A y por dos barras igualmente inclinadas de lon-

gitud l y sección A_1 (fig. 270). Determinar las tensiones en las barras y la relación $\frac{A_1}{A}$, para la que dichas tensiones son numéricamente iguales.

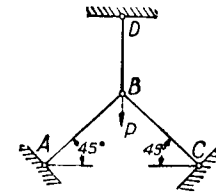


FIG. 270

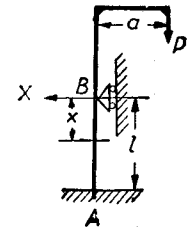


FIG. 271

Solución: El sistema es hiperestático. Sea X la fuerza de extensión de la barra vertical. Las fuerzas de compresión en las barras inclinadas serán $\frac{1}{\sqrt{2}} (P - X)$ y la energía de deformación del sistema es

$$U = \frac{X^2 l}{2 A E} + \frac{(P - X)^2 l}{2 A_1 E}.$$

El principio del trabajo mínimo da:

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{EA} - \frac{(P - X)l}{A_1 E} = 0,$$

de donde

$$X = \frac{P}{1 + \frac{A_1}{A}}.$$

Sustituyendo en la ecuación

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (P - X)$$

se obtiene

$$A_1 = \sqrt{2} A.$$

2. Determinar la reacción horizontal X en el sistema representado en la figura 271.

Solución: La fuerza desconocida X intervendrá solamente en la parte de energía potencial de flexión que corresponde al trozo AB de la barra. Para este trozo, $M = Pa - Xx$, y la ecuación del trabajo mínimo da:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dX} &= \frac{d}{dX} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = - \frac{1}{EI} \int_0^l (Pa - Xx) x dx \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{Xl^3}{3} - \frac{Pal^2}{2} \right) = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$X = \frac{3}{2} P \frac{a}{l}.$$

3. Determinar las relaciones horizontales X en el sistema de la figura 272. Todas las dimensiones figuran en la tabla siguiente.

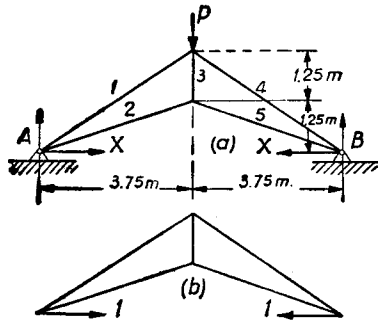


FIG. 272

las columnas 4.^a y 5.^a de la tabla. La tensión total en una barra cualquiera será:

$$S_i = S_i^0 + S'_i X.$$

i	l_i cm.	A_i cm. ²	S_i^0	S'_i	$\frac{S_i^0 S'_i l_i}{A_i}$	$\frac{S_i'^2 l_i}{A_i}$
1	450,75	31,25	-1,803 P	1,202	-51,24 P	20,8
2	395,25	18,75	1,581 P	-2,108	-70,28 P	93,6
3	125,0	12,50	1,000 P	-1,333	-13,32 P	17,8
4	450,75	31,25	-1,803 P	1,202	-31,24 P	20,8
5	395,25	18,75	1,581 P	-2,108	-70,28 P	93,6

$$\Sigma = -216,36 P; \quad \Sigma = 246,6$$

Sustituyendo su valor en la ecuación anterior, queda

$$\sum_1^5 \frac{(S_i^0 + S'_i X) l_i}{A_i E} S_i = 0,$$

de donde

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i^0 S'_i l_i}{A_i}}{\sum_{i=1}^5 \frac{S_i'^2 l_i}{A_i}} \quad (f)$$

Los elementos de estas sumaciones figuran en las columnas 6.^a y 7.^a de la tabla. Sustituyendo los valores en la ecuación (f), se obtiene

$$X = 0,877 P.$$

4. Determinar la tensión en la barra horizontal sobrante del sistema de la figura 273, suponiendo que la longitud de esta barra es 750 cm. y el área de su sección recta A_0 . Las barras restantes tienen las mismas dimensiones que en el problema 3.

Solución: La tensión de la barra horizontal se calcula por la ecuación (201). Esta ecuación es análoga a la ecuación (f) del problema 3, pero en el sistema de la figura 273 existe además la barra horizontal. La tensión producida en esta barra por la fuerza P actuando sola ($X = 0$) es cero, es decir, $S_0^0 = 0$. La tensión producida por las dos fuerzas iguales a la unidad —fig. 273 (b)— es $S'_0 = 1$. El término adicional en el numerador de la ecuación (f) es

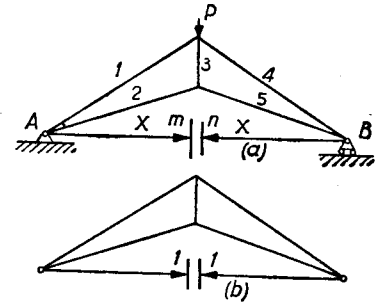


FIG. 273

$$\frac{S_0^0 S'_0 l_0}{A_0} = 0.$$

El término adicional del denominador es:

$$\frac{S_0'^2 l_0}{A_0} = \frac{1 \cdot l_0}{A_0} = \frac{750}{A_0}.$$

Por consiguiente, empleando los datos del problema 3,

$$X = \frac{216,36 P}{\frac{750}{A_0} + 246,6}.$$

Tomando, por ejemplo, $A_0 = 62,5 \text{ cm.}^2$,

$$X = \frac{216,36 P}{12 + 246,6} = 0,836 P.$$

Que es solamente el 4,7 por 100 menor que el valor obtenido en el problema 3, para apoyos fijos¹.

Suponiendo $A_0 = 6,25 \text{ cm.}^2$,

$$X = \frac{216,36}{120 + 246,5} = 0,590 P.$$

Se observará que en un sistema hiperestático las tensiones en las barras dependen de sus secciones rectas.

5. Determinar las tensiones en las barras del sistema de la figura 20 utilizando el principio del trabajo mínimo.

6. Determinar las tensiones en las barras del sistema represen-

¹ Tomando $A_0 = \infty$ se obtiene la misma condición que para apoyos fijos.

tado en la figura 274, suponiendo que todas las barras son de las mismas dimensiones y materiales.

Solución: Prescindiendo de una barra, los esfuerzos en las demás pueden determinarse por las condiciones de la estática; por consiguiente, el sistema tiene una barra hiperestática solamente, sea esta barra la 1 y X la tensión correspondiente. Todas las barras que son lados del hexágono tendrán las mismas tensiones X ; las barras 8, 9, 11 y 12 sufren compresiones X y las tensiones en las barras 7 y 10 valen $P - X$.

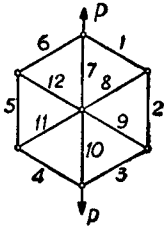


FIG. 274

La energía de deformación del sistema es:

$$U = 10 \frac{X^2 l}{2 AE} + 2 \frac{(P - X)^2 l}{2 AE}$$

Estableciendo que $\frac{dU}{dX} = 0$, se obtiene

$$X = \frac{P}{6}$$

7. Determinar las tensiones en el sistema de la figura 268, suponiendo que todas las barras tienen la misma sección recta y tomando como hiperestática la tensión en la diagonal AD .

Solución: Sustituyendo los datos dados por la tabla siguiente, en la ecuación (201), se tiene:

$$X = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} P$$

i	l_i	S_i^0	S_i'	$S_i^0 S_i' l_i$	$S_i'^2 l_i$
1	a	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{a}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{a}{2}$
4	a	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{aP}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	+1	$-2aP$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	0	+1	0	$a\sqrt{2}$

$$\Sigma = -\frac{(3 + 2\sqrt{2})aP}{\sqrt{2}}; \quad \Sigma = 2a(1 + \sqrt{2})$$

8. Un cuadro de sección uniforme (fig. 275) se somete a la acción de una carga uniformemente repartida de intensidad q . Determinar el momento flector en los ángulos.

Respuesta:

$$M = \frac{(a^3 + b^3)q}{12(a + b)}$$

9. Una carga P está sostenida por dos vigas de igual sección que se cruzan en ángulo recto (fig. 276). Determinar la presión X entre las vigas.

Respuesta:

$$X = \frac{Pl^3}{l^3 + l_1^3}$$

10. Encontrar el valor de la hiperestática H en el pórtico representado en la figura 167, utilizando el principio del trabajo mínimo.

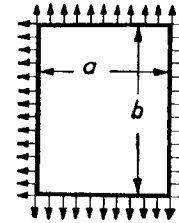


FIG. 275

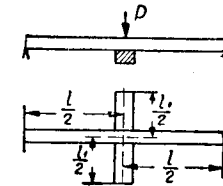


FIG. 276

Solución: La energía de deformación por flexión del pórtico es

$$U = 2 \int_0^h \frac{H^2 x^2 dx}{2 EI_1} + \int_0^l \frac{(M_0 - Hh)^2 dx}{2 EI} \tag{g}$$

donde M_0 representa el momento flector para las secciones del dintel calculado como viga apoyada en sus extremos. Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{dU}{dH} = 0, \tag{h}$$

se encuentra

$$\frac{2Hh^3}{EI_1} + \frac{Hh^2 l}{EI} = \frac{h}{EI} \int_0^l M_0 dx. \tag{k}$$

La integral del segundo miembro es el área del diagrama triangular de momentos flectores para una viga con carga concentrada P . Por consiguiente,

$$\int_0^l M_0 dx = \frac{1}{2} Pc(l - c)$$

Sustituyendo en (k), se obtiene para H la expresión ya conocida (ecuación 114, pág. 192).

11. Encontrar las incógnitas hiperestáticas en las estructuras representadas por las figuras 166, 169 y 171, utilizando el principio de trabajo mínimo.

12. Hallar el momento flector en la figura 269, suponiendo $l_1 = 2l_2$.

71. **El teorema de la reciprocidad de los trabajos.**—Comenzaremos considerando la viga simplemente apoyada de la figura 277 (a), y calcularemos la flecha en el punto D , cuando la carga P actúa en C . Esta flecha se obtiene haciendo $x = d$ en la ecuación (86), y será

$$(y)_{x=d} = \frac{Pbd}{6l} (l^2 - b^2 - d^2). \quad (a)$$

Se ve que la flecha (a) no varía si se cambia d por b y b por d , lo que indica que en el caso de la figura 277 (b), la flecha en D_1 es

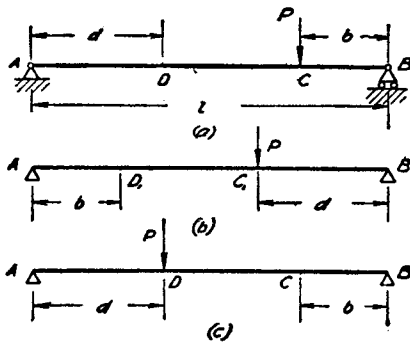


FIG. 277

la misma que la flecha en el punto D de la figura 277 (a). De la figura 277 (b), se obtiene la figura 277 (c), girando la viga 180° , lo que origina que el punto C_1 coincida con el punto D , y el punto D_1 con el punto C . Por consiguiente, la flecha en C , en la figura 277 (c), es igual a la flecha en D , en la figura 277 (a). Este es un caso

particular del teorema de la reciprocidad en el trabajo.

Para establecer el teorema en forma general¹, consideraremos un cuerpo elástico. Sea el cuerpo representado en la figura 278 y supongamos que está apoyado de tal manera que le sea imposible todo movimiento como cuerpo rígido. El primer estado de fatigas lo ocasiona el sistema de fuerzas exteriores

¹ Un caso particular de este teorema fué obtenido por J. C. Maxwell, loc. cit., pág. 310. El teorema se debe a E. Betti, *Il nuovo cimento* (serie 2), vols. 7 y 8, 1872. En una forma más general, el teorema fué dado por lord Rayleigh, *London Math. Soc. Proc.*, vol. 4, 1873, o *Scientific Papers*, vol. 1, pág. 179. Diversas aplicaciones a la solución de problemas de ingeniería han sido hechas por O. Mohr, loc. cit., página 315, y H. Müller-Breslau, loc. cit., pág. 315.

P_1 y P_2 . El segundo lo origina el sistema P_3 y P_4 . El corrimiento de los puntos de aplicación en las direcciones de las fuerzas son $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 , en el primer estado, y $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4$, en el segundo estado. El teorema de la reciprocidad dice: El trabajo correspondiente a las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo estado es igual al trabajo correspondiente a las fuerzas del segundo estado para los corrimientos del primero. Es decir,

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2 = P_3\delta_3 + P_4\delta_4. \quad (203)$$

Para demostrar este teorema, consideraremos la energía de deformación del cuerpo cuando actúan simultáneamente todas las fuerzas $P_1 \dots P_4$ y haremos uso de la propiedad

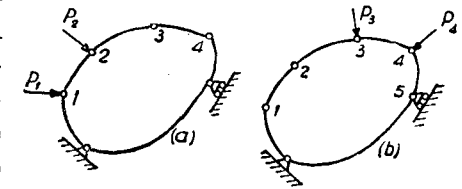


FIG. 278

de que el valor de la energía de deformación no depende del orden en que se aplican las fuerzas, sino de los valores finales que estas fuerzas alcanzan. Supongamos que primeramente se aplican las cargas P_1 y P_2 y después las fuerzas P_3 y P_4 . La energía de deformación almacenada durante la aplicación de P_1 y P_2 es

$$\frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2} \quad (a)$$

Aplicando ahora P_3 y P_4 , el trabajo suministrado por estas fuerzas es

$$\frac{P_3\delta'_3}{2} + \frac{P_4\delta'_4}{2} \quad (b)$$

Ahora bien, durante la aplicación de las fuerzas P_3 y P_4 , los puntos de aplicación de las fuerzas P_1 y P_2 se habrán desplazado δ'_1 y δ'_2 . Por consiguiente, P_1 y P_2 realizan un trabajo

$$P_1\delta'_1 + P_2\delta'_2. \quad (c)$$

¹ Estas expresiones no se dividen por 2 porque las fuerzas P_1 y P_2 permanecen constantes durante el tiempo en el que sus puntos de aplicación experimentan los desplazamientos δ'_1 y δ'_2 .

La energía de deformación que en total ha almacenado el cuerpo se obtendrá sumando (a), (b) y (c); es decir,

$$U = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_3 \delta'_3}{2} + \frac{P_4 \delta'_4}{2} + P_1 \delta'_1 + P_2 \delta'_2. \quad (d)$$

Si ahora suponemos que primeramente se carga el cuerpo con las fuerzas P_3 y P_4 y después con las P_1 y P_2 y repetimos el razonamiento expuesto, obtendremos

$$U = \frac{P_3 \delta'_3}{2} + \frac{P_4 \delta'_4}{2} + \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + P_3 \delta_3 + P_4 \delta_4. \quad (e)$$

Escribiendo que (d) y (e) son iguales, se obtiene la ecuación (203). Este teorema puede demostrarse cualquiera que sea el número de fuerzas y también para pares o para fuerzas y pares. En el caso de un par, el corrimiento que se considera es el ángulo de rotación correspondiente.

Para el caso particular de que en el primer estado de fatiga actúe una sola fuerza P_1 y de que en el segundo estado exista únicamente la fuerza P_2 , la ecuación (203) da ¹

$$P_1 \delta'_1 = P_2 \delta_2. \quad (204)$$

Si $P_1 = P_2$, se deduce que $\delta'_1 = \delta_2$, es decir, el corrimiento del punto de aplicación de la fuerza P_2 en la dirección de la fuerza P_2 producido por la fuerza P_1 es igual al corrimiento del punto de aplicación de la fuerza P_1 en la dirección de P_1 , producido por la fuerza P_2 . Una comprobación de esta propiedad, para un caso particular, se vió para la viga de la figura 277.

Como otro ejemplo, consideraremos la flexión de una viga apoyada. En el primer estado la supondremos flexada por la acción de una carga concentrada P aplicada en su centro; en el segundo estado, actúa sobre la viga un par flector M en su extremo. La carga P produce un giro en el extremo $\theta = \frac{Pl^2}{16 EI}$. El par M aplicado en el extremo produce en el centro una flecha

$$\frac{Ml^2}{16 EI}.$$

¹ El primero que probó esta propiedad fué J. C. Maxwell, y frecuentemente se denomina «teorema de Maxwell».

La ecuación (204) dice

$$P \frac{Ml^2}{16 EI} = M \frac{Pl^2}{16 EI}.$$

El teorema de la reciprocidad de los trabajos se emplea mucho para estudiar las líneas de influencia en los sistemas hiperestáticos. Sea, por ejemplo, una viga empotrada por un extremo y apoyada por el otro (fig. 279), sometida a la acción de una carga concentrada P . Se trata de encontrar cómo varía la reacción X cuando la carga P se mueve sobre la viga y, por consiguiente, varía la cantidad x . Consideremos el estado real de la viga —figura 279 (a)— como primer estado de fatigas. El segundo estado (ficticio) será el de la figura 279 (b). Se ha prescindido de la carga exterior y de la cantidad hiperestática X y se ha cargado la viga con una fuerza unitaria en la dirección de X . Este segundo estado es estáticamente determinado y la elástica correspondiente (véase ecuación 97, página 142) será la de la figura.

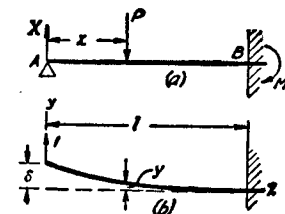


FIG. 279

Si los ejes coordenados se toman como indica la figura 279 (b), se tendrá

$$y = \frac{1}{6 EI} (l-x)^2 (2l+x). \quad (f)$$

Representemos con δ la flecha en el extremo y con y la flecha a la distancia x del apoyo izquierdo. Aplicando el teorema de reciprocidad de los trabajos, se tiene: El trabajo de las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo es

$$X\delta - Py.$$

El trabajo de las fuerzas del segundo estado para los corrimientos del primero será nulo, puesto que el punto de aplicación A de la fuerza unitaria tiene corrimiento nulo en el primer estado ¹. Por consiguiente,

$$X\delta - Py = 0,$$

¹ Las reacciones en el extremo empotrado no se consideran en ambos casos a causa de ser nulo el desplazamiento correspondiente.

de donde

$$X = P \frac{y}{\delta} \tag{g}$$

Se ve, pues, que a medida que la carga P cambia de posición, la reacción X es proporcional a los valores correspondientes de y en la figura 279 (b). Por consiguiente, la elástica del segundo estado (ecuación f) representa gráficamente el modo de variar X con x . Esta curva será la línea de influencia de la reacción X ¹.

Si actúan varias cargas simultáneamente, empleando el método de superposición y aplicando la ecuación (g), se tendrá

$$X = \frac{1}{\delta} \sum P_n y_n$$

donde y_n es la flecha correspondiente a la carga P_n y la suma- ción se extiende a todas las cargas.

Problemas

1. Construir las líneas de influencia para las reacciones en los apoyos de una viga continua sobre tres apoyos (fig. 280).

Solución: Para encontrar la línea de influencia de la reacción en el apoyo intermedio consideraremos como primer estado de fatiga el de la figura 280 (a). El segundo estado es el de la figura 280 (b), en el que se prescinde de la carga P y de la reacción X , y en el lugar de esta última se hace actuar una carga unitaria hacia arriba. Este segundo estado es estáticamente determinado y su elástica conocida: —ecuaciones (86) y (87), página 136—; por consiguiente, las flechas δ e y se pueden

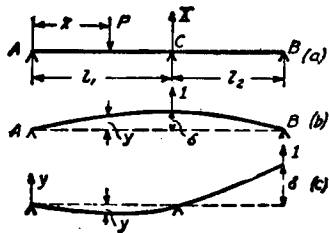


FIG. 280

calcular. El trabajo correspondiente a las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo es

$$X\delta - Py.$$

El trabajo correspondiente a la fuerza unitaria del segundo estado para los corrimientos del primero (flecha cero en C) es cero; por consiguiente,

$$X\delta - Py = 0; \quad X = P \frac{y}{\delta}$$

¹ El empleo de modelos para la determinación de líneas de influencia ha sido desarrollado por G. E. Beggs, *Journal of Franklin Institute*, 1927.

Es decir, la elástica del segundo estado es la línea de influencia de la reacción X . Para obtener la línea de influencia de la reacción en B , el segundo estado de fatiga será el que representa la figura 280 (c).

2. Utilizando la línea de influencia del problema anterior, determinar la reacción en B si la carga P está en el centro del primer tramo ($x = \frac{l_1}{2}$) —fig. 280 (a).

Respuesta: La reacción estará dirigida hacia abajo y valdrá

$$\frac{3P}{16} \frac{l_1^3}{l_2^3 + l_2 l_1}$$

3. Encontrar la línea de influencia correspondiente al momento flector en el apoyo central C de la viga continua sobre tres apoyos de la figura 281. Utilizar la línea hallada para averiguar el valor del momento flector M_c , cuando la carga P está en el centro del segundo tramo.

Solución: El primer estado de fatiga es el que origina la carga real —figura 281 (a)— con el momento flector M_c aplicado en la sección C . Para el segundo estado se quita la carga P , se corta la viga en C y se aplican dos pares unitarios en lugar de M_c —fig. 281 (b)—. Este último caso es estáticamente determinado. Los ángulos θ_1 y θ_2 vienen dados por la ecuación (104), y la flecha y por la ecuación (105). La suma de los ángulos θ_1 y θ_2 representa el corrimiento en el segundo estado correspondiente al momento flector M_c que obra en el primer estado. El trabajo correspondiente a las fuerzas del primer estado para los corrimientos del segundo es ¹:

$$M_c(\theta_1 + \theta_2) - Py.$$

El trabajo correspondiente a las fuerzas del segundo estado para los corrimientos del primero es cero, puesto que en la figura 281 (a) la viga no está cortada. Por consiguiente,

$$M_c(\theta_1 + \theta_2) - Py = 0;$$

o sea

$$M_c = P \frac{y}{\theta_1 + \theta_2} \tag{h}$$

Se ve que cuando la carga P cambia de posición, el momento flector M_c varía proporcionalmente a la flecha y . Por consiguiente, la

¹ Se supone que el momento flector M_c produce una elástica cóncava por abajo.

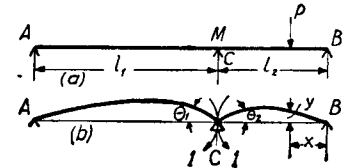


FIG. 281

elástica en el segundo estado representa la línea de influencia de M_c . Recordando que

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{l_1 + l_2}{3EI}$$

y que la flecha en el centro del segundo tramo es

$$(y)_{x=\frac{l_2}{2}} = \frac{1 \cdot l_2^3}{16EI}$$

el momento flector, cuando la carga P está en el centro del segundo tramo —ecuación (h)—, será

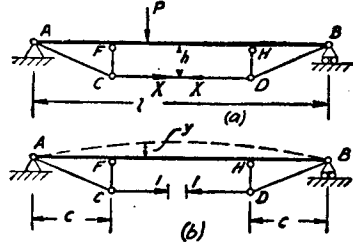
$$M_c = \frac{3}{16} \frac{Pl_2^2}{l_1 + l_2}$$

4. Encontrar la línea de influencia correspondiente al momento flector en el extremo empotrado de la viga AB (fig. 279) y calcular este momento cuando la carga está situada a $x = \frac{l}{3}$ del apoyo izquierdo.

Respuesta:

$$M_b = \frac{4}{27} lP.$$

5. Construir la línea de influencia correspondiente a las reacciones horizontales H del pórtico de la figura 167 (a) cuando la carga P se mueve a lo largo de la barra AB .



Respuesta: La línea de influencia tiene la misma forma que la elástica de la barra AB para las condiciones de carga de la figura 166 (c).

6. Hallar la línea de influencia correspondiente a la tensión X en la barra horizontal CD —fig. 282 (a)— cuando la carga P se mueve a lo largo de la viga AB . Calcular X cuando la carga está en el centro de la viga. Los corrimientos debidos al alargamiento o contracción de las barras se despreciarán y sólo se considerará el corrimiento debido a la flexión de la viga AB .

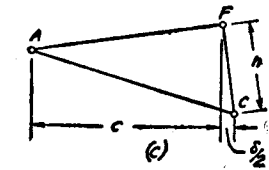


Fig. 282

Solución: El estado de carga de la figura 282 (a) se tomará como primer estado de fatiga. En el segundo estado se prescinde de la carga P y de las fuerzas X , y en el lugar de estas últimas se colocan dos fuerzas unitarias—fig. 282 (b)—. Debido a estas fuerzas, se transmitirán a la viga AB en los puntos F y H unas presiones verticales dirigidas hacia arriba de valor $\frac{1 \cdot h}{c}$ y la viga flexará tal como se indica con líneas de trazos.

Si la flecha de la viga en el punto correspondiente a la carga P la representamos con y y δ es el corrimiento de los puntos C y D , uno hacia el otro, en el segundo estado de fatiga, el teorema de la reciprocidad de los trabajos da

$$X\delta - Py = 0 \quad \text{o sea} \quad X = P \frac{y}{\delta} \quad (i)$$

Por consiguiente, la elástica de la viga AB , en el segundo estado, es la línea de influencia pedida. La flexión de una viga por la acción de dos cargas situadas simétricamente se analizó en el problema 1, pá. de dos cargas situadas simétricamente se analizó en el problema 1, página 151. Poniendo $\frac{1 \cdot h}{c}$ en lugar de P en las fórmulas que obtuvimos, las flechas de la viga en F y a la mitad de la luz serán

$$(y)_{x=c} = \frac{ch}{6EI} (3l - 4c) \quad \text{y} \quad (y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{h}{24EI} (3l^2 - 4c^2),$$

respectivamente.

Examinando la rotación del triángulo AFC —fig. 282 (c)— como un cuerpo rígido, se ve que el corrimiento horizontal del punto C es igual al corrimiento vertical del punto F multiplicado por $\frac{h}{c}$; por consiguiente,

$$\delta = 2 \frac{h}{c} (y)_{x=c} = \frac{h^2}{3EI} (3l - 4c).$$

Sustituyendo este valor y el de la flecha a la mitad de la luz en la ecuación (i), se obtiene

$$X = \frac{P}{8h} \frac{3l^2 - 4c^2}{3l - 4c}.$$

7. Encontrar la línea de influencia correspondiente a la tensión en la barra CD del sistema representado en la figura 283, despreciando

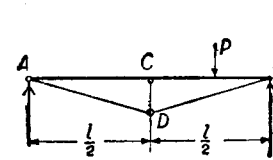


Fig. 283

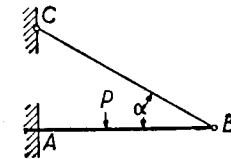


Fig. 284

los corrimientos debidos a los acortamientos y alargamientos de las barras y considerando solamente la flexión de la viga AB .

Respuesta: La línea tendrá la misma forma que la correspondiente a la reacción en el apoyo central de la viga sobre tres apoyos (véase problema 1, pá. 328).

8. Construir la línea de influencia para la barra BC que atiranta a la viga AB . Hallar la tensión en BC cuando P está a la mitad de AB (fig. 284).

Respuesta: Despreciando los corrimientos debidos al alargamiento del tirante BC y a la contracción de la viga AB , la fuerza en BC es

$$\frac{5}{16} \frac{P}{\sin \alpha}$$

72. **Casos de excepción.**—Al deducir el teorema de Castigliano y el de reciprocidad de los trabajos, se ha supuesto que los corrimientos debidos a la deformación son proporcionales a las

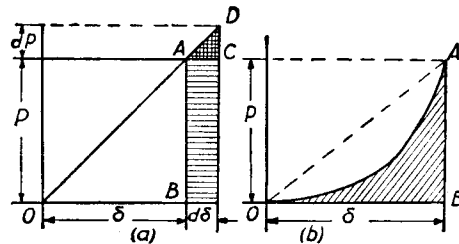


FIG. 285

cargas que obran sobre el sistema elástico. Existen casos para los que dichos corrimientos no son proporcionales a las cargas aun cuando el material de que está formado el cuerpo siga la ley de Hooke. Estos casos se presentan siempre

que los corrimientos debidos a la deformación influyen en la acción de las cargas exteriores. En dichos casos, la energía de deformación no es ya una función de segundo grado y el teorema de Castigliano no es válido. Para aclarar esta limitación, vamos a considerar el caso sencillo de que solamente una carga P actúe sobre el sistema elástico. Supongamos primeramente que el corrimiento δ es proporcional a la fuerza correspondiente P , tal como indica la línea recta OA de la figura 285 (a). El área OAB representa la energía de deformación almacenada por el sistema durante la aplicación de la carga P . Para un aumento infinitesimal $d\delta$ en el corrimiento, la energía de deformación aumenta en la cantidad que representa el área rayada en la figura y se obtiene

$$dU = Pd\delta. \quad (a)$$

Si la ley de variación es lineal, el triángulo infinitesimal ADC es semejante al triángulo OAB ; por consiguiente,

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta}{P} \quad \text{ó} \quad d\delta = \frac{\delta dP}{P}. \quad (b)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (a),

$$dU = P \frac{\delta dP}{P},$$

de donde se deduce el teorema de Castigliano:

$$\frac{dU}{dP} = \delta. \quad (c)$$

Un caso para el que no puede aplicarse el teorema de Castigliano es el representado en la figura 286. Dos barras horizontales e iguales AC y BC , articuladas en A , B y C , están sometidas a la acción de la fuerza vertical P aplicada en C . Sea C_1 la posición de C después de la deformación y α el ángulo de inclinación de cada barra en la posición deformada. El alargamiento unitario de las barras deducido de la figura 286 (a) es

$$\epsilon = \left(\frac{l}{\cos \alpha} - l \right) : l. \quad (d)$$

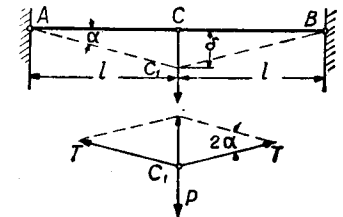


FIG. 286

Si solamente se consideran corrimientos pequeños, α es pequeño y $\frac{1}{\cos \alpha}$ vale, aproximadamente, $1 + \frac{\alpha^2}{2}$. Sustituyendo en (d), se tiene

$$\epsilon = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Las tensiones en las barras son

$$T = AE\epsilon = \frac{AE\alpha^2}{2}. \quad (e)$$

Por la condición de equilibrio del punto C_1 —fig. 286 (b)—,

$$P = 2\alpha T, \quad (f)$$

y con el valor de T , dado por la ecuación (e),

$$P = AE\alpha^3,$$

de donde

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \quad (g)$$

y

$$\delta = l\alpha = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}. \quad (205)$$

En este caso, el corrimiento no es proporcional a la carga P , a pesar de que el material de la barra sigue la ley de Hooke. La relación entre δ y P está representada en la figura 285 (b) por la curva OA . El área rayada OAB en dicha figura representa la energía de deformación almacenada por el sistema. El valor de la energía de deformación es

$$U = \int_0^{\delta} Pd\delta \quad (h)$$

Sustituyendo el valor de

$$P = AE \frac{\delta^3}{l^3}, \quad (i)$$

despejado de la ecuación (205), se obtiene

$$U = \frac{AE}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} = \frac{P\delta}{4} = \frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}. \quad (l)$$

Lo que demuestra que la energía de deformación no es una función de segundo grado en la fuerza P . Tampoco vale dicha energía la mitad del producto $P\delta$ (véase artículo 68), si no solamente su cuarta parte. El teorema de Castigliano no será válido:

$$\frac{dU}{dP} = \frac{d}{dP} \left(\frac{Pl}{4} \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \right) = \frac{1}{3} l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}} = \frac{1}{3} \delta.$$

Resultados análogos se obtienen en todos los casos en que los corrimientos no son proporcionales a las cargas.

APÉNDICE

MOMENTOS DE INERCIA DE LAS ÁREAS PLANAS

I. El momento de inercia de un área plana con relación a un eje de su plano

Al estudiar la flexión de vigas, se encontraron integrales de este tipo:

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad (1)$$

en las que cada elemento de área dA está multiplicado por el cuadrado de su distancia al eje z y la integración extendida al área A de la sección recta de la viga (fig. 1). Una integral de

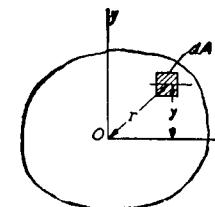


FIG. 1

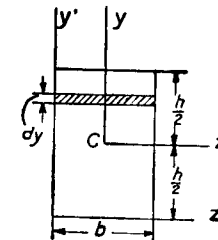


FIG. 2

esta naturaleza se denomina momento de inercia del área A con relación al eje z . En casos sencillos, los momentos de inercia se calculan analíticamente con facilidad. Sea, por ejemplo, un rectángulo (fig. 2). Para calcular el momento de inercia de este rectángulo con relación al eje horizontal de simetría z , se puede